

---

# QUANTENTELEPORTATION

– THEORETISCHE GRUNDLAGEN FÜR DIE SCHULE –

---

Quantum teleportation  
– Theoretical foundations for school –

Masterarbeit im Studiengang Master of Education

von

Christian Geyer

05.09.2012

Betreuer:

apl. Prof. Dr. Hans-Jürgen Korsch

Prof. Dr. Artur Widera

TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN  
FACHBEREICH PHYSIK  
AG THEORETISCHE QUANTENDYNAMIK





## Zusammenfassung

Verschränkte Zustände sind ein fester Bestandteil der Quantenphysik. Besondere Bedeutung erfuhren sie im Rahmen der Diskussionen über das EPR-Paradoxon, da man mit ihnen überprüfen kann, ob es lokale verborgene Variablen gibt oder nicht.

Aber nicht nur in diesem Zusammenhang sind verschränkte Zustände von großer Bedeutung. Eine wichtige Rolle spielen sie auch in der Quanteninformationstheorie, einem aktuellen Forschungsgebiet, welches sich unter anderem auch mit der Entwicklung eines Quantencomputers befasst. Das Themengebiet der Quanteninformationstheorie umfasst jedoch viel mehr als nur der Quantencomputer. Eine der spektakulärsten Entwicklungen aus dem Bereich der Quanteninformationstheorie ist die Quantenteleportation, welche erstmals 1998 von der Arbeitsgruppe um Anton Zeilinger experimentell realisiert wurde.

In dieser Masterarbeit wird die Theorie zur Quantenteleportation zusammengefasst, wobei die Zielgruppe Physiklehrerinnen und -lehrer an einem Gymnasium sind. Ihnen soll es durch diese Arbeit ermöglicht werden, die Quantenteleportation zu verstehen und die Quantenteleportation im Schulunterricht zu behandeln oder das Thema Quantenteleportation als Facharbeitsthema an interessierte Schüler zu vergeben und die entsprechenden Arbeiten mit fundiertem Wissen zu betreuen.

Nach einem kurzen Überblick über die Entwicklung der Quantenphysik in Kapitel 1, werden deshalb in Kapitel 2 die benötigten mathematischen Grundlagen zusammengefasst. Kapitel 3 befasst sich mit der Verschränkung und ihrer Bedeutung für die Quantenphysik, insbesondere im Zusammenhang mit dem EPR-Paradoxon. Anschließend wird die Quantenteleportation ausführlich in Kapitel 4 dargestellt. Dabei wird nicht nur das Protokoll nach Bennett, sondern auch die experimentelle Realisierung von Zeilinger vorgestellt. Im letzten Kapitel (Kapitel 5) wird abschließend diskutiert ob und mit welchen (didaktischen) Reduktionen die Quantenteleportation in der Schule behandelt werden könnte. Ergänzende mathematische Grundlagen sowie einige ausführlichere Rechnungen, die aus Gründen der Nachvollziehbarkeit in der Arbeit weggelassen wurden, findet man im Anhang.



## Abstract

Entangled states are a fundamental part of quantum physics. In particular, they can be used to prove that quantum physics is complete, i.e. there are no local hidden variables.

But entangled states are not only needed to answer this question, they also play an important role in the theory of quantum information. The theory of quantum information is an actual field of research including, e.g., the quantum computer and quantum teleportation, which was realised for the first time by a research team led by Anton Zeilinger in 1998.

In this master thesis the theory of quantum teleportation will be summarised for physics teachers so that they can understand quantum teleportation and are enabled to create a sequence of lessons about quantum teleportation or to supervise pupils writing theses concerning quantum teleportation.

Therefore the necessary mathematical foundations will be summarised in chapter 2 after a short overview of the historical development of quantum physics (chapter 1). Furthermore chapter 3 outlines the theory of entanglement including its relevance for quantum physics especially related to the EPR paradox. Subsequently the theory of quantum teleportation will be presented in chapter 4, including Bennett's protocol and the experimental realisation by Zeilinger. In the last chapter (chapter 5) it will be discussed if it is possible to teach quantum teleportation at school and which (didactical) reductions have to be made to achieve this. Additional mathematical foundations and some detailed calculations, omitted in this thesis for reasons of comprehensibility, can be found in the appendix.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Quantenmechanik</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Mathematische Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1	Quantenphysik und lineare Algebra . . . . .	5
2.2	Zweizustands- und Mehrteilchensysteme . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Unschärferelation und Verschränkung</b>	<b>17</b>
3.1	Die Heisenbergsche Unschärferelation . . . . .	17
3.2	Das EPR-Paradoxon . . . . .	20
3.3	Verschränkung . . . . .	22
3.4	Verschränkungsmaße . . . . .	25
3.5	Die Bellsche Ungleichung . . . . .	33
3.6	Erzeugung verschränkter Photonen . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Quantenteleportation</b>	<b>41</b>
4.1	Bennetts Protokoll . . . . .	44
4.1.1	Wurde das Quantenobjekt wirklich teleportiert? . . . . .	49
4.1.2	Ermöglicht die Teleportation Kommunikation und/oder Reisen mit Überlichtgeschwindigkeit? . . . . .	50
4.1.3	Wurde das No-Cloning Theorem verletzt? . . . . .	51
4.2	Experimentelle Realisierung . . . . .	52
4.3	Die Bell-Messung . . . . .	54
4.4	Visualisierung der Quantenteleportation . . . . .	60
4.5	Probleme und Anwendungen . . . . .	63
4.5.1	Dekohärenz und Destillation . . . . .	64
4.5.2	Speicherung . . . . .	66
4.5.3	Anwendungen . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Quantenteleportation in der Schule</b>	<b>71</b>
5.1	Der Lehrplan . . . . .	71
5.2	Schwierigkeiten und Lösungsvorschläge . . . . .	72
5.2.1	Mathematische Grundlagen . . . . .	73
5.2.2	Physikalische Grundlagen . . . . .	76
5.2.3	Materialien und Experimente . . . . .	79

5.3	Präkonzepte . . . . .	82
5.4	Fazit . . . . .	83
<b>A</b>	<b>Ergänzungen zu den mathematischen Grundlagen</b>	<b>85</b>
A.1	Wichtige Begriffe aus der Algebra . . . . .	85
A.1.1	Vektorräume . . . . .	85
A.1.2	Lineare Abbildungen . . . . .	88
A.1.3	Matrizen . . . . .	91
A.2	Funktionen von Matrizen . . . . .	98
A.3	Dimension des Produktraums . . . . .	100
<b>B</b>	<b>Ergänzungen zu den Kapiteln 3-5</b>	<b>102</b>
B.1	Ergänzungen zum Dichteoperator . . . . .	102
B.2	Basistransformation für die Bell-Messung . . . . .	103



# 1 Quantenmechanik

Als Max Planck sich im Jahr 1900 mit dem Problem der Strahlung Schwarzer Körper beschäftigte, ahnte er noch nicht, dass seine Lösung [1] die Physik revolutionieren sollte. Seine Strahlungsformel

$$w(\nu)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

wobei  $w(\nu)$  die spektrale Energiedichte der Schwarzkörperstrahlung und  $\nu$  ihre Frequenz ist, löste nicht nur die Probleme, welche aus dem Rayleigh-Jeansschen Strahlungsgesetz hervorgingen, sondern es beinhaltet auch die Forderung, dass die Energie nur in diskreten Vielfachen der Konstanten  $h$  aufgenommen werden kann. Die Grundlage für die Quantenphysik war damit geschaffen.

1905 führte Albert Einstein mit seiner Erklärung des Fotoeffektes die Quantisierung der Physik weiter. Er stellte fest, dass sich der Fotoeffekt nur dann richtig erklären lässt, wenn das Licht nicht als Welle, sondern als Teilchen betrachtet wird [2]. Diese Teilchen (Photonen) besitzen jeweils eine bestimmte Energie, welche durch

$$E = h\nu$$

gegeben ist, und eine Verbindung zwischen der Beschreibung des Lichtes als elektromagnetische Welle mit der Frequenz  $\nu$  und der Beschreibung als Photonen herstellt.

Louis de Broglie folgerte aus Einsteins Erklärung, dass das Licht sowohl Teilchen- als auch Welleneigenschaften besitzt und übertrug dies 1924 auf andere Teilchen, wie beispielsweise Elektronen. Er leitete her, dass ein Teilchen der Masse  $m$ , welches sich mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt, durch eine Welle der Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

beschrieben werden kann. Erst in den darauf folgenden Jahren konnte de Broglies Theorie experimentell überprüft werden und der Welle-Teilchen-Dualismus wurde zum festen Bestandteil der Quantenphysik.

In den folgenden Jahren entwickelte sich die Quantenphysik schnell weiter. Neben der von Werner Heisenberg hergeleiteten Unschärferelation für Messgrößen (siehe Kapitel 3.1) ist

sicherlich die Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x, t) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

welche die Bewegung eines Quantenteilches der Masse  $m$  im Potential  $V(x, t)$  beschreibt und 1926 von Erwin Schrödinger aufgestellt wurde, eine der bekanntesten Formeln der Quantenphysik.

Mit der Beschreibung von Teilchen durch Wellen geht ein Problem einher: Die Lösung  $\Psi(x, t)$  der Schrödingergleichung ist in der Regel komplexwertig und kann daher nicht gemessen werden. Gemessen werden kann lediglich  $|\Psi(x, t)|^2$ , was als Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich das Teilchen zum Zeitpunkt  $t$  am Ort  $x$  aufhält, interpretiert werden kann.

Damit wird der Zufall ein fester Bestandteil der Quantenphysik. Viele Physiker hatten damit ihre Schwierigkeiten. Insbesondere stellte sich die Frage nach dem Messprozess und dem Messergebnis. In der Kopenhagener Deutung der Quantenphysik nimmt eine Messgröße erst dann einen exakten Wert an, wenn man die entsprechende Messung durchführt. Im Vorfeld ist die Messgröße noch unbestimmt. Albert Einstein hatte mit dieser Interpretation große Schwierigkeiten und versuchte mit verschiedenen Argumentationen zu zeigen, dass die quantenmechanische Beschreibung der Realität nicht vollständig ist (vgl. Kapitel 3.2). Erst viele Jahre später konnte die Frage nach der Richtigkeit der Quantenphysik endlich geklärt werden.

Ein Problem mit dem Messprozess ist jedoch noch offen: Wenn man eine Messung, z.B. die Bestimmung des Aufenthaltsortes  $x$ , vornimmt, so nimmt die Messgröße  $x$  dabei einen eindeutigen Wert  $x_0$  an, d.h. das Betragsquadrat der Wellenfunktion  $\Psi$  nimmt plötzlich nur noch in einer durch die Unschärfe festgelegten Umgebung  $\Delta x$  von  $x_0$  einen von Null verschiedenen Wert an. Man nennt diesen Vorgang oft den „Kollaps der Wellenfunktion“. Es stellt sich jedoch die Frage, wie dieser „Kollaps“ ausgelöst und mathematisch beschrieben werden kann.

Trotz dieser Probleme und langen Kontroversen hat sich die Quantenmechanik als äußerst erfolgreich herausgestellt. In vielen Bereichen führte sie zu großen Fortschritten und brachte einige Anwendungen hervor, welche aus unserem Leben nicht mehr wegzudenken sind. Beispielsweise wurde es endlich möglich ein Atommodell aufzustellen, welches die ex-

perimentellen Befunde erklärt. Niels Bohr machte den ersten Schritt in diese Richtung mit seinem semi-klassischen Atommodell, in welchem die Elektronen sich nur auf bestimmten Bahnen um den Atomkern bewegen dürfen.

Das heutige quantenmechanische Atommodell hat zwar einige Gemeinsamkeiten mit dem Modell von Bohr, jedoch basiert es auf Lösungen der Schrödingergleichung und beseitigt dadurch die Probleme des Bohrschen Atommodells. Eine Anwendung des quantenmechanischen Atommodells dürfte jeder Mensch zu Hause haben: Der Laser, wie er heute zum Beispiel in CD- und DVD-Playern verwendet wird, wurde überhaupt erst durch die Quantenmechanik möglich.

Aber auch in anderen Geräten findet man heute Bauteile, welche erst durch die Quantenphysik ermöglicht wurden. So sind Halbleiterbauelemente heute ein fester Bestandteil moderner Kommunikationsmedien wie beispielsweise Handys und Computer. Dabei gelang die korrekte Beschreibung der Vorgänge in einem Halbleiter, welche erst ihre Anwendung ermöglichte, durch die Quantenphysik.

Die Quantenphysik wird auch in Zukunft noch weitere Neuerungen in unseren Alltag bringen. Besonders das Gebiet der Quanteninformationstheorie ist viel versprechend. Eine der möglichen Neuerungen dieses aktuellen Forschungsgebiets ist der Quantencomputer, welcher insbesondere in einigen Gebieten der Mathematik und der Informatik für Fortschritte sorgen wird. Auch die Quantenkryptographie und die Quantenteleportation werden in Zukunft an Bedeutung gewinnen und in einigen Jahren vielleicht genauso alltäglich sein wie heute ein Laser.

Ein wichtiger Bestandteil der Quanteninformationstheorie ist für die genannten Anwendungen besonders wichtig: Verschränkte Teilchen. Diese Teilchen sind ein fundamentaler Bestandteil der Quantenphysik und spielten in den Diskussionen rund um das EPR-Paradoxon<sup>1</sup> eine große Rolle. Mit ihrer Hilfe konnte auch die Frage nach der Vollständigkeit der Quantenphysik beantwortet werden (siehe Kapitel 3.5). Besonders interessant ist jedoch ihre Verwendung im Rahmen der Quantenteleportation, mit welcher sich diese Arbeit beschäftigt.

---

<sup>1</sup>Dies ist eine alte Bezeichnung. Heute spricht man stattdessen von EPR-Korrelation.

Aber nicht nur die Quanteninformationstheorie ist ein aktuelles Forschungsgebiet. Physiker stellen sich bei ihrer Forschung immer wieder die Frage, ob ein Phänomen oder Objekt zu Quantenphysik gehört bzw. durch sie beschrieben werden kann. Viele Wissenschaftler legen mittlerweile jedoch sehr strenge Kriterien an, wenn es um die Entscheidung darüber geht, ob etwas quantenhaft ist oder nicht. Das alleinige Auftreten von Interferenzeffekten ist dadurch meist nicht mehr ausreichend, um ein Phänomen oder Objekt zur Quantenwelt zu zählen, da Interferenzeffekte auch mit der (klassischen) Wellenmechanik beschrieben und erklärt werden können. Von allen Forschern wird jedoch die Quantenkorrelation, wie sie beispielsweise verschränkte Photonen zeigen, zur Quantenwelt gezählt.

## 2 Mathematische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die mathematischen Grundlagen für die folgenden Betrachtungen dargestellt. Dabei wird quantenphysikalische Realität nicht, wie meist in der Schule üblich, in Form von Wahrscheinlichkeitswellen modelliert, sondern durch Objekte und Konstrukte der linearen Algebra.

Zur Vereinfachung der benötigten Mathematik werden in dieser Arbeit nur endlich dimensionale Fälle betrachtet, wenngleich in der Quantenphysik an vielen Stellen auch der unendlich dimensionale Fall benötigt wird. Eine ausführlichere Darstellung der mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik findet man in [3].

### 2.1 Quantenphysik und lineare Algebra

Einer der zentralen Begriffe aus der linearen Algebra ist der des Vektorraums. Im Falle der Quantenmechanik kann jedoch nicht jeder beliebige Vektorraum verwendet werden. Der Vektorraum muss eine wichtige Eigenschaft erfüllen: Er muss ein Hilbert-Raum sein.

#### Definition 2.1. *Hilbert-Raum*

*Ein Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  ist ein (endlich dimensionaler) Vektorraum über den komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$ , auf welchem ein Skalarprodukt definiert ist. Das Skalarprodukt wird mit  $\langle | \rangle$  bezeichnet und besitzt die üblichen Eigenschaften*

$$\langle a | \lambda_1 b + \lambda_2 c \rangle = \lambda_1 \langle a | b \rangle + \lambda_2 \langle a | c \rangle, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \quad (1)$$

$$\langle a | a \rangle \geq 0 \quad (2)$$

$$\langle a | b \rangle = \langle b | a \rangle^*, \quad (3)$$

*wobei das Sternchen im Exponenten wie in der Physik üblich das komplex konjugierte einer Zahl kennzeichnet.*

Es gibt verschiedene Hilbert-Räume<sup>2</sup>, aber am anschaulichsten ist der  $\mathbb{C}^n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ , da er sehr ähnlich zum  $\mathbb{R}^3$  ist. Im folgenden ist es jedoch uninteressant, welcher konkrete Hilbert-Raum betrachtet wird, da die Aussagen für alle Hilbert-Räume gelten. In der

---

<sup>2</sup>Manchmal wird behauptet, dass es für jede Dimension  $n$  einen einzigen endlich dimensionalen Hilbert-Raum gibt. In der Tat gilt für endlich dimensionale Hilberträume  $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^{\dim(\mathcal{H})}$ , weshalb man eigentlich nur den Hilbert-Raum  $\mathbb{C}^n$  benötigt (siehe Anhang A.1.2).

Theoretischen Physik hat sich daher eine formale Schreibweise, die Dirac-Schreibweise, ausgebildet.

**Definition 2.2. Dirac-Schreibweise**

Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbert-Raum. Jedes Element des Hilbert-Raums nennt man einen Vektor und man schreibt für diesen Vektor

$$|\phi\rangle \in \mathcal{H}. \quad (4)$$

Durch die Abbildung

$$\Psi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^\dagger : |\phi\rangle \mapsto |\phi\rangle^\dagger, \quad (5)$$

wobei  $|\phi\rangle^\dagger$  definiert ist als

$$|\phi\rangle^\dagger : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C} : |\xi\rangle \mapsto \langle\phi|\xi\rangle, \quad (6)$$

erhält man ebenfalls einen Hilbert-Raum  $\mathcal{H}^\dagger$ , welcher zu  $\mathcal{H}$  isomorph ist, und als **Dualraum** bezeichnet wird. Für seine Elemente schreibt man  $\langle\phi|$ , d.h.

$$|\phi\rangle^\dagger := \langle\phi|. \quad (7)$$

Die Elemente des Dualraums sind Abbildungen von  $\mathcal{H}$  nach  $\mathbb{C}$  und werden Funktionale genannt. Funktionale sind jedoch nur ein Spezialfall der folgenden Abbildungen.

**Definition 2.3. Linearer Operator**

Seien  $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$  zwei Hilbert-Räume. Eine Abbildung

$$\hat{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}' : |\phi\rangle \mapsto \hat{A}|\phi\rangle, \quad (8)$$

welche die folgenden zwei Eigenschaften erfüllt

1.  $\hat{A}(|\phi\rangle + |\psi\rangle) = \hat{A}|\phi\rangle + \hat{A}|\psi\rangle$
2.  $\hat{A}(\lambda|\phi\rangle) = \lambda\hat{A}|\phi\rangle$  für  $\lambda \in \mathbb{C}$

heißt **linearer Operator**.

Im Folgenden werden nur noch lineare Operatoren von Interesse sein. Daher werden in den folgenden Betrachtungen die Begriffe Operator und linearer Operator synonym verwendet. Zunächst jedoch ein Beispiel für lineare Operatoren.

**Beispiel 2.4.**

a) Der Operator  $\mathbb{1} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} : |\phi\rangle \mapsto |\phi\rangle$  ist offensichtlich linear und wird als Identität bezeichnet.

b) Sei  $|p\rangle \in \mathcal{H}$  ein beliebiger, aber fester und normierter Vektor, dann wird durch

$$\hat{P}_p : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} : |\phi\rangle \mapsto \hat{P}_p(|\phi\rangle) := |p\rangle\langle p|\phi\rangle \quad (9)$$

ein linearer Operator definiert, welcher den Vektor  $|\phi\rangle$  auf den Vektor  $|p\rangle$  projiziert. Dieser Projektor lässt sich noch verallgemeinern. Sei  $U \leq \mathcal{H}$  ein Unterraum<sup>3</sup> und  $\{|i\rangle \mid i = 1, \dots, m\}$  eine orthonormierte Basis von  $U$ , dann ist

$$\hat{P}_U : \mathcal{H} \rightarrow U : |\phi\rangle \mapsto \sum_{i=1}^m |i\rangle\langle i|\phi\rangle \quad (10)$$

ein linearer Operator, der  $|\phi\rangle$  auf den Unterraum  $U$  projiziert.

Die Darstellung von Operatoren wird in einigen Fällen besonders einfach. Dazu benötigt man jedoch ein Konzept, welches nun kurz definiert werden soll.

**Definition 2.5. Eigenwert und Eigenvektor**

Sei  $\hat{A}$  ein linearer Operator auf  $\mathcal{H}$  und  $0 \neq |\phi\rangle \in \mathcal{H}$  ein normierter Vektor, dann heißt  $|\phi\rangle$  **Eigenvektor** von  $\hat{A}$ , wenn es ein  $\lambda \in \mathbb{C}$  gibt, so dass

$$\hat{A}|\phi\rangle = \lambda|\phi\rangle \quad (11)$$

gilt. In diesem Fall heißt  $\lambda \in \mathbb{C}$  dann **Eigenwert** von  $\hat{A}$ .

Beispiele zu Eigenvektoren und Eigenwerten findet man in Anhang A. Dort wird auch die Diagonalisierbarkeit von linearen Operatoren, welche im Folgenden wichtig wird, definiert. Im Fall eines diagonalisierbaren<sup>4</sup> Operators wird, wie der folgende Satz zeigt, seine Darstellung nämlich besonders einfach.

**Satz 2.6.**

Sei  $\hat{A}$  ein diagonalisierbarer Operator auf einem Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  und  $a_1, \dots, a_n$  die Ei-

---

<sup>3</sup>Siehe Definition A.2.

<sup>4</sup>Siehe Anhang A.1.3.

genwerte von  $\hat{A}$ , sowie  $|a_i\rangle$  der normierte Eigenvektor zum Eigenwert  $a_i$ , dann gilt:

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^n a_i |a_i\rangle \langle a_i|. \quad (12)$$

Beweis:

Da  $\hat{A}$  diagonalisierbar ist, bilden die normierten Eigenvektoren von  $\hat{A}$  eine Orthonormalbasis des Hilbert-Raums  $\mathcal{H}$ . Zudem gilt für die Eigenvektoren  $\hat{A}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$ .

Sei nun  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$  beliebig, dann gilt  $|\phi\rangle = \sum_{i=1}^n \mu_i |a_i\rangle$  wobei  $\mu_i = \langle a_i | \phi \rangle$ . Damit ergibt sich

$$\hat{A}|\phi\rangle = \hat{A} \left( \sum_{i=1}^n \mu_i |a_i\rangle \right) = \sum_{i=1}^n \mu_i \hat{A}|a_i\rangle = \sum_{i=1}^n \mu_i a_i |a_i\rangle = \left( \sum_{i=1}^n a_i |a_i\rangle \langle a_i| \right) |\phi\rangle.$$

□

Im Folgenden wird eine Einschränkung auf zwei Arten von Operatoren vorgenommen, welche für die Quantenphysik besonders interessant sind. Dazu sei angemerkt, dass man zu jedem Operator  $\hat{A}$  auf dem Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  einen Operator  $\hat{A}^\dagger$  definieren kann, der dieselbe Operation auf  $\mathcal{H}^\dagger$  ausführt:

**Definition 2.7. Adjungierter Operator**

Sei  $\hat{A} : \mathcal{H} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}$  ein auf  $\mathcal{H}$  definierter Operator, dann erhält man durch die Verkettung der Abbildung aus Gleichung (5) mit dem Operator  $\hat{A}$  den Operator

$$\hat{A}^\dagger : \mathcal{H}^\dagger \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}^\dagger : \langle \phi | \mapsto \langle \phi | \hat{A}^\dagger := (\hat{A}|\phi\rangle)^\dagger, \quad (13)$$

welcher auf  $\mathcal{H}^\dagger$  dieselbe Operation ausführt, wie  $\hat{A}$  auf  $\mathcal{H}$  und daher als **adjungierter Operator** zu  $\hat{A}$  bezeichnet wird.

Mithilfe dieser Definition lassen sich nun zwei besondere Arten von Operatoren definieren, welche jeweils eine besondere Eigenschaft erfüllen.

**Definition 2.8. Hermitesche und unitäre Operatoren**

Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbert-Raum und  $\hat{A}$  ein Operator auf  $\mathcal{H}$ , dann heißt  $\hat{A}$

- a) **hermitesch**, falls  $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$
- b) **unitär**, falls  $\hat{A}^\dagger \hat{A} = \hat{A} \hat{A}^\dagger = \mathbf{1}$ .



Beide Sorten von Operatoren besitzen besondere Eigenschaften (siehe Anhang A), wobei die wichtigste Eigenschaft die Diagonalisierbarkeit ist. Sie ist die Aussage des Spektralsatzes der Algebra, welcher z.B. in [4] bewiesen wird.

Wozu aber all der mathematische Aufwand? Der Grund ist relativ einfach: In der Quantenphysik lässt sich der Zustand eines Systems als normierter Vektor eines Hilbert-Raums interpretieren und eine quantenmechanische Messgröße als hermitescher Operator auffassen. Aber warum wird eine quantenmechanische Messgröße (Observable)  $A$  durch einen hermiteschen Operator  $\hat{A}$  beschrieben?

Um diese Frage zu beantworten, muss ein Blick auf die mathematische Beschreibung eines physikalischen Messvorgangs geworfen werden. Ein System, welches sich in einem beliebigen, unbekanntem Zustand befindet, lässt sich durch den Vektor

$$|\phi\rangle = \sum_{i=1}^n c_i |i\rangle \quad (14)$$

beschreiben, wobei die Vektoren  $|1\rangle, |2\rangle, \dots, |n\rangle$  eine orthonormierte Basis des Hilbert-Raumes bilden, und die  $c_i \in \mathbb{C}$  die Bedingung  $\sum_{i=1}^n |c_i|^2 = 1$  erfüllen. Daher lassen sich die  $p_i := |c_i|^2$  als Wahrscheinlichkeit dafür interpretieren, dass sich das System im Zustand  $|i\rangle$  befindet.

Aber wie wird nun die Messung einer Observablen  $\hat{A}$  mathematisch beschrieben? Die Antwort auf diese Frage ist ganz einfach: Man wendet den Operator auf den Zustand an und erhält

$$|\phi'\rangle = \hat{A}|\phi\rangle. \quad (15)$$

Mathematisch erhält man also einen neuen Zustandsvektor, aus physikalischer Sicht würde man aber einen Messwert, d.h. einen Skalar erwarten. Hier kann eine Basistransformation weiterhelfen. Ist der Operator  $\hat{A}$  diagonalisierbar, d.h. existiert eine Basis  $\{|a_i\rangle \mid i = 1, \dots, n\}$  des Hilbert-Raums, welche aus den orthonormierten Eigenvektoren von  $\hat{A}$  besteht, so ergibt sich

$$\hat{A}|\phi\rangle = \hat{A} \sum_{i=1}^n c_i |a_i\rangle = \sum_{i=1}^n a_i c_i |a_i\rangle. \quad (16)$$

Befindet sich das System nun zum Zeitpunkt der Messung im Eigenzustand  $|a_i\rangle$ , so kann man der Observablen daher den Messwert  $a_i \in \mathbb{C}$  zuordnen.

Allerdings machen aus physikalischer Sicht nur reellwertige Messwerte Sinn. Schließlich gibt es ja beispielsweise keine komplexe Länge oder Geschwindigkeit. Daher muss für die korrekte physikalische Beschreibung der Realität die Observable nur reelle Eigenwerte besitzen. Dies ist mit Sicherheit aber nur dann der Fall, wenn der Observablen ein hermitescher Operator entspricht.

Zusammenfassend lässt sich daher für einen Messvorgang festhalten, dass das Messergebnis streng zufällig mit der Wahrscheinlichkeit  $p_i := |\langle a_i | \phi \rangle|^2$  der Wert  $a_i \in \mathbb{R}$  sein wird<sup>5</sup>. Präpariert man daher ein System immer wieder im Zustand  $|\phi\rangle$  und misst danach immer wieder dieselbe Observable  $\hat{A}$ , so erwartet man im Mittel den Wert

$$\langle \hat{A} \rangle := \sum_{i=1}^n |c_i|^2 a_i. \quad (17)$$

Mit Gleichung (16) erhält man hieraus die folgende Darstellung.

**Definition 2.9. Erwartungswert eines Operators**

Sei  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$  beliebig und  $\hat{A}$  ein linearer Operator, dann heißt

$$\langle \hat{A} \rangle := \langle \phi | \hat{A} | \phi \rangle \quad (18)$$

**Mittelwert oder Erwartungswert** von  $\hat{A}$ .

Natürlich weichen die bei einer Messung erhaltenen Werte für die Observablen von diesem erwarteten Wert im Allgemeinen ab. Ein sinnvolles statistisches Maß für diese Abweichung ist die Standardabweichung. Sie wird mithilfe des Erwartungswertes definiert.

**Definition 2.10. Unschärfe eines Operators**

Sei  $\hat{A}$  ein linearer Operator, dann ist

$$\Delta \hat{A} := \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2} \quad (19)$$

die **Standardabweichung** oder **Unschärfe** von  $\hat{A}$ .

Damit kann die quantenphysikalische Realität im Allgemeinen beschrieben werden: Ein quantenphysikalisches System wird durch einen Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  modelliert. Die Zustände

---

<sup>5</sup>Dies gilt nur für nicht entartete Operatoren. Im entarteten Fall, d.h. wenn es mehrere Eigenvektoren zu einem Eigenwert gibt, ist die Wahrscheinlichkeit für den Messwert  $a_i$  gegeben durch  $\sum_{\{j | \hat{A}|a_j\rangle = a_i|a_j\rangle\}} |\langle a_j | \phi \rangle|^2$ .

des Systems entsprechen dann den Vektoren des Hilbert-Raums und eine quantenphysikalische Messgröße (Observable) wird durch einen hermiteschen Operator repräsentiert.

Im weiteren Verlauf werden zwei unterschiedliche Typen von physikalischen Systemen benötigt. Ein etwas genauerer Blick auf sie lohnt sich daher.

## 2.2 Zweizustands- und Mehrteilchensysteme

Bisher wurden nur allgemeine Systeme betrachtet. In den folgenden Kapitel, insbesondere in Kapitel 4, werden jedoch spezielle Systeme betrachtet. Diese Systeme haben eine besondere Form und werden in der Regel aus mehreren Teilchen bestehen.

In vielen Fällen besitzen Teilchen eine Eigenschaft, die in zwei zueinander orthogonalen Ausprägungen und deren Superposition vorkommen kann. Ist nur diese Eigenschaft relevant, so kann die mathematische Betrachtung darauf eingeschränkt und ein geeigneter, reduzierter Hilbert-Raum betrachtet werden. Beispiele für solche Systeme sind Photonen (hinsichtlich ihrer Polarisation) oder Elektronen (hinsichtlich ihres Spins).

Der Vorteil einer Einschränkung auf die jeweils interessante Eigenschaft ist, dass der zur Beschreibung benötigte Hilbert-Raum die Dimension 2 besitzt. Seine Basis wird durch die beiden zueinander orthogonalen Ausprägungen der betrachteten Eigenschaft gebildet. Meist werden diese orthogonalen Ausprägungen (Basisvektoren) durch Symbole, wie beispielsweise im Falle der Polarisation von Photonen durch  $|\leftrightarrow\rangle$  und  $|\updownarrow\rangle$ , oder allgemeiner durch die orthonormierten Zustände  $|0\rangle$  und  $|1\rangle$  repräsentiert.

Möchte man konkret mit einem Zweizustandssystem rechnen, so müssen die symbolisch repräsentierten Vektoren in eine entsprechende Form überführt werden. Eine solche Form sind beispielsweise Spaltenvektoren wie im  $\mathbb{C}^2$ .

### Beispiel 2.11.

*Gegeben sei ein Photon, welches hinsichtlich seiner Polarisation betrachtet werden soll. Es wird beschrieben durch den Zustand*

$$|\phi\rangle = c_h|\leftrightarrow\rangle + c_v|\updownarrow\rangle \in \mathcal{H},$$

*wobei  $c_h, c_v \in \mathbb{C}$  mit  $|c_h|^2 + |c_v|^2 = 1$  gilt. Soll nun die Polarisation durch ein geeignetes*

Bauteil gedreht werden, so ist es für die mathematische Beschreibung sinnvoller, die Darstellung des Hilbert-Raums zu transformieren.

Statt der Basis  $\{|\leftrightarrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$  von  $\mathcal{H}$  wählt man die Basis  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  des Hilbert-Raumes  $\mathbb{C}^2$ , welcher zu  $\mathcal{H}$  isomorph ist. Dann lautet der Zustand unter Verwendung der Transformation

$$|\leftrightarrow\rangle \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

ganz einfach

$$|\phi\rangle = c_h \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Die Drehung der Polarisation um den Winkel  $\theta$  wird dann über  $\mathbb{C}^2$  beschrieben durch die Matrix

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Der Zustand mit der gedrehten Polarisation ist gegeben durch

$$\begin{aligned} |\tilde{\phi}\rangle = \hat{M}|\phi\rangle &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} (c_h \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \\ &= c_h \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix} + c_v \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= (c_h \cos(\theta) + c_v \sin(\theta)) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-c_h \sin(\theta) + c_v \cos(\theta)) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (22)$$

Da  $|\leftrightarrow\rangle \hat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $|\downarrow\rangle \hat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  gilt, erhält man:

$$|\tilde{\phi}\rangle = (c_h \cos(\theta) + c_v \sin(\theta))|\leftrightarrow\rangle + (-c_h \sin(\theta) + c_v \cos(\theta))|\downarrow\rangle. \quad (23)$$

Neben den Zweizustandssystemen werden im weiteren Verlauf auch Systeme, welche aus mehreren Teilchen bestehen, benötigt werden.

Besteht ein System aus mehreren Teilchen, so muss der Zustand  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$  des Gesamt-

systems auch alle Informationen über die einzelnen Teilchen enthalten. Aber der Zustand jedes einzelnen Teilchens wird ebenfalls durch einen Vektor  $|\phi_i\rangle \in \mathcal{H}_i$  beschrieben, wobei  $\mathcal{H}_i$  der Hilbert-Raum ist, welcher das 1-Teilchensystem, welches nur aus dem Teilchen  $i$  besteht, beschreibt. Dadurch wird die Struktur des Hilbert-Raumes festgelegt.

**Definition 2.12. Produktraum**

Seien  $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_N$  Hilbert-Räume, dann definiert man den so genannten **Produktraum**

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N, \quad (24)$$

wobei  $\otimes$  das Tensorprodukt ist. Seine Elemente haben die Form

$$|\Psi\rangle := \sum_{i_1, \dots, i_N} c_{i_1, \dots, i_N} |\psi_{i_1}\rangle \otimes |\psi_{i_2}\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_{i_N}\rangle, \quad (25)$$

wobei  $|\psi_{i_j}\rangle \in \mathcal{H}_j$  für  $j = 1, 2, \dots, N$  und  $c_{i_1, \dots, i_N} \in \mathbb{C}$  gilt.

Das Skalarprodukt auf  $\mathcal{H}$  wird über die Skalarprodukte der Hilbert-Räume  $\mathcal{H}_i$  definiert und ist für zwei Vektoren

$$|\Psi\rangle = \sum_{i_1, \dots, i_N} c_{i_1, \dots, i_N} |\psi_{i_1}\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_{i_N}\rangle, |\Phi\rangle = \sum_{j_1, \dots, j_N} d_{j_1, \dots, j_N} |\phi_{j_1}\rangle \otimes \dots \otimes |\phi_{j_N}\rangle \quad (26)$$

gegeben durch

$$\langle \Phi | \Psi \rangle := \sum_{j_1, \dots, j_N} \sum_{i_1, \dots, i_N} d_{j_1, \dots, j_N}^* c_{i_1, \dots, i_N} \langle \phi_{j_1} | \psi_{i_1} \rangle \dots \langle \phi_{j_N} | \psi_{i_N} \rangle. \quad (27)$$

Das dyadische Produkt bzw. das Tensorprodukt erscheint auf den ersten Blick etwas kompliziert. Weitere Details zu Tensoren und zum Tensorprodukt findet man beispielsweise in [5] ab S. 79. Zur Veranschaulichung und zum besseren Verständnis soll hier das folgende einfache Beispiel genügen.

**Beispiel 2.13.**

Sei  $|v\rangle \in \mathcal{H}_1 = \mathbb{C}^n$  und  $|w\rangle \in \mathcal{H} = \mathbb{C}^m$ , dann haben  $v, w$  die Form

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, |w\rangle = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$|v\rangle \otimes |w\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & \cdots & w_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 w_1 & v_1 w_2 & \cdots & v_1 w_m \\ v_2 w_1 & v_2 w_2 & \cdots & v_2 w_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n w_1 & v_n w_2 & \cdots & v_n w_m \end{pmatrix} \quad (28)$$

Eine Eigenschaft von Mehrteilchensystemen ist die Tatsache, dass der zur Beschreibung benötigte Produktraum  $\mathcal{H}$  sehr schnell eine große, unhandliche Dimension erreichen kann, welche Berechnungen auch mit heutigen Computern erschwert.

**Proposition 2.14.**

Seien  $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_N$  Hilbert-Räume der Dimension  $n$ , dann hat der Produktraum

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$$

die Dimension  $n^N$

Beweis: Siehe Anhang A.3. □

Bereits bei der Betrachtung von 100 Teilchen, welche jeweils als Zweizustandssystem modelliert werden, wird die Dimension des Produktraums für menschliche Verhältnisse unvorstellbar groß: Sie ist in diesem Fall  $n = 2^{100} \approx 10^{30}$ .

Allerdings werden in allen folgenden Überlegungen Systeme, bestehend aus maximal vier Teilchen, welche jeweils als Zweizustandssysteme modelliert werden können, betrachtet. Der zugehörige Hilbert-Raum ist also mit der Dimension  $n = 8$  noch relativ überschaubar.

Für den späteren Verlauf ist es sinnvoll, eine abkürzenden Notation einzuführen, welche die mathematischen Formulierungen erleichtern wird.

**Definition 2.15. Vierteilchensystem**

Gegeben seien die Einteilchen-Hilbert-Räume  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3, \mathcal{H}_4$ . Dann beschreibt der Hilbert-Raum

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3 \otimes \mathcal{H}_4 \quad (29)$$

ein System, welches aus vier Teilchen besteht. Jeder Zustand des Gesamtsystems ist durch

die Zustände der einzelnen Teilchen bestimmt, d.h. er hat die Form

$$|\Phi\rangle = \sum_{i,j,k,l} c_{i,j,k,l} |\phi_i\rangle_1 \otimes |\psi_j\rangle_2 \otimes |\xi_k\rangle_3 \otimes |\zeta_l\rangle_4, \quad (30)$$

wobei  $c_{i,j,k,l} \in \mathbb{C}$  gilt und die Indizes 1, 2, 3, 4 an den einzelnen Vektoren verdeutlichen sollen, welches Teilchen durch welchen Zustand beschrieben wird. Verkürzt schreibt man für diesen Zustand

$$|\Phi\rangle = \sum_{i,j,k,l} c_{i,j,k,l} |\phi_i\rangle |\psi_j\rangle |\xi_k\rangle |\zeta_l\rangle \quad (31)$$

bzw.

$$|\Phi\rangle = \sum_{i,j,k,l} c_{i,j,k,l} |\phi_i, \psi_j, \xi_k, \zeta_l\rangle, \quad (32)$$

wobei der erste Eintrag für das erste Teilchen, der zweite für das zweite Teilchen usw. steht. Die Zustände  $|\phi_i\rangle, |\psi_j\rangle, |\xi_k\rangle, |\zeta_l\rangle$  der einzelnen Teilchen können dabei durch Zahlen, Buchstaben oder Symbole (z.B.  $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$  für Spin-up bzw. Spin-down oder  $|\leftrightarrow\rangle, |\updownarrow\rangle$  für horizontale bzw. vertikale Polarisation) repräsentiert werden.

Natürlich kann auch an einem System, welches aus mehreren Teilchen besteht, eine Operation durchgeführt bzw. die Messung einer Observablen vorgenommen werden. Jedoch sehen die Observablen, d.h. die Operatoren nicht mehr so einfach aus, wie im Falle eines einzelnen Teilchens.

**Definition 2.16. Operatoren für Mehrteilchensysteme**

Seien  $\hat{A}_i : \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{H}_i$  für  $i = 1, 2, \dots, N$  Operatoren und  $|\Psi\rangle := |\psi\rangle_1 |\psi\rangle_2 \cdots |\psi\rangle_N$  ein Vektor aus  $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$ , dann wird durch

$$\hat{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} : |\Psi\rangle \mapsto \hat{A}|\Psi\rangle := (\hat{A}_1 \otimes \cdots \otimes \hat{A}_N)|\Psi\rangle = \hat{A}_1|\psi\rangle_1 \otimes \cdots \otimes \hat{A}_N|\psi\rangle_N \quad (33)$$

ein Operator auf  $\mathcal{H}$  definiert. Ein Operator, der nur auf das Teilchen  $j$  wirkt hat dann die Form

$$\hat{A}_j = \mathbf{1}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_{j-1} \otimes \hat{A}_j \otimes \mathbf{1}_{j+1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_N. \quad (34)$$

An folgendem Beispiel wird diese Definition der Operatoren für Mehrteilchensysteme deutlicher.

**Beispiel 2.17. Messung an einem Teilchen eines Mehrteilchensystems**

Betrachtet sei ein System aus drei Teilchen, welche jeweils als Zweizustandssystem mit

den orthonormierten Zuständen  $|0\rangle, |1\rangle$  beschrieben werden können. Ferner befinde sich das System im Zustand

$$|\Theta\rangle = |0, 1, 1\rangle + |0, 0, 1\rangle + |1, 0, 0\rangle + |1, 1, 1\rangle, \quad (35)$$

wobei zur Vereinfachung der Darstellung auf die Normierung verzichtet wurde. Nun werde an Teilchen 2 eine Messung durchgeführt, d.h. es werde bestimmt, in welchem Zustand sich das Teilchen 2 befindet.

Mit der Kenntnis über das Messergebnis kollabiert<sup>6</sup> dann natürlich der Zustand. Angenommen das Ergebnis der Messung an Teilchen 2 sei  $|1\rangle$ , dann werden im Zustand  $|\Theta\rangle$  alle Summanden, bei denen sich das Teilchen 2 im Zustand  $|0\rangle$  befindet, gelöscht. Dies wird mathematisch durch den Operator

$$\hat{P}_{|1\rangle_2} := \mathbf{1}_1 \otimes |1\rangle_2 \langle 1|_2 \otimes \mathbf{1}_3 \quad (36)$$

beschrieben. Seine Anwendung auf  $|\Theta\rangle$  ergibt

$$\begin{aligned} \hat{P}_{|1\rangle_2} |\Theta\rangle &= (\mathbf{1}_1 \otimes |1\rangle_2 \langle 1|_2 \otimes \mathbf{1}_3) (|0, 1, 1\rangle + |0, 0, 1\rangle + |1, 0, 0\rangle + |1, 1, 1\rangle) \\ &= \mathbf{1}_1 |0\rangle \otimes |1\rangle_2 \langle 1|_1 \otimes \mathbf{1}_3 |1\rangle + \mathbf{1}_1 |0\rangle \otimes |1\rangle_2 \langle 1|_0 \otimes \mathbf{1}_3 |1\rangle \\ &\quad + \mathbf{1}_1 |1\rangle \otimes |1\rangle_2 \langle 1|_0 \otimes \mathbf{1}_3 |0\rangle + \mathbf{1}_1 |1\rangle \otimes |1\rangle_2 \langle 1|_1 \otimes \mathbf{1}_3 |1\rangle \\ &= |0\rangle |1\rangle |1\rangle + |1\rangle |1\rangle |1\rangle = |1\rangle_2 \otimes (|0\rangle_1 |1\rangle_3 + |1\rangle_1 |1\rangle_3), \end{aligned} \quad (37)$$

was dem Zustand des Gesamtsystems nach der Messung an Teilchen 2 entspricht.

---

<sup>6</sup>Kollabieren bedeutet in diesem Fall, dass ich die Anzahl der Zustände, welche in der Superposition berücksichtigt werden müssen, reduziert.



### 3 Unschärferelation und Verschränkung

Eine der großen Herausforderungen der Quantenphysik ist die Beschreibung und Erklärung des physikalischen Messprozesses. In Kapitel 2 wurde der Messprozess aus der mathematischen Perspektive beschrieben. Aber wie kann man die Zufälligkeit des Messergebnisses bei einem Zustand  $|\phi\rangle = \sum_i c_i |i\rangle$  erklären?

Eine Möglichkeit wäre es zu sagen, dass diese Zufälligkeit, welche sich in Form von Wahrscheinlichkeiten, mit denen ein bestimmter Wert gemessen wird, manifestiert, einfach durch unsere Unwissenheit zu Stande kommt. Der Begriff der Unwissenheit bedeutet hierbei, dass bei der quantenmechanischen Beschreibung der Realität eine oder mehrere Eigenschaften nicht erfasst werden, welche in Wirklichkeit das Messergebnis bestimmen.

Die dazu konträre Position ist die Kopenhagener Interpretation der Quantenphysik. Sie geht davon aus, dass die quantenphysikalische Beschreibung der Realität vollständig ist. Das System befindet sich gleichzeitig in allen Zuständen  $|i\rangle$  und nimmt erst durch den Messprozess zufällig einen einzigen der Zustände  $|i\rangle$  an. Der Zufall wohnt also der Quantenmechanik inne und ist ein fester Bestandteil der Realität. Um diesen Standpunkt zu veranschaulichen und ad absurdum zu führen, entwickelte Erwin Schrödinger, ein Beispiel, welches als *Schrödingers Katze* große Berühmtheit erlangte [6, 7].

Das Problem der beiden Positionen ist die Tatsache, dass sie vollkommen konträr und daher unvereinbar sind. Dies führte lange Zeit zu großen Kontroversen zwischen ihren Anhängern. Erst ein Experiment von Aspect et al. [8, 9] konnte die Frage klären<sup>7</sup>. In diesem Kapitel wird der lange Weg bis zur Klärung der Kontroversen nachvollzogen.

#### 3.1 Die Heisenbergsche Unschärferelation

In Kapitel 2 wurde gezeigt, dass physikalische Messgrößen in der Quantenmechanik durch hermitesche Operatoren beschrieben werden. Dabei ist jedoch zu beachten, dass zwei lineare Operatoren im Allgemeinen nicht vertauschen, d.h. für zwei Operatoren  $\hat{A}, \hat{B}$  gilt

---

<sup>7</sup>Bis heute kann die Frage aber noch nicht endgültig geklärt werden, da es noch keine „loophole“-freie Verletzung der Bellschen Ungleichung gibt, d.h. bei allen aktuellen Verletzungen der Ungleichung gibt es wegen des jeweiligen Versuchsaufbaus noch mögliche Schlupflöcher, sodass man noch nicht zu 100% die Existenz von lokalen verborgenen Variablen ausschließen kann.

in der Regel:

$$\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}. \quad (38)$$

Dies hat weitreichende Auswirkungen auf den physikalischen Messprozess. Zur Verdeutlichung der Auswirkungen betrachte man zwei lineare, nichtentartete Operatoren  $\hat{V}, \hat{W}$ , welche verträglich sind, d.h. die beiden Operatoren erfüllen die Bedingung  $\hat{V}\hat{W} = \hat{W}\hat{V}$ . Wenn nun der Zustand des Systems  $|\phi\rangle$  ein normierter Eigenvektor von  $\hat{V}$  zum Eigenwert  $v$  ist, so gilt

$$\hat{V}(\hat{W}|\phi\rangle) = \hat{W}(\hat{V}|\phi\rangle) = \hat{W}(v|\phi\rangle) = v(\hat{W}|\phi\rangle). \quad (39)$$

Dies bedeutet jedoch, dass  $\hat{W}|\phi\rangle$  ebenfalls ein Eigenvektor von  $\hat{V}$  zum Eigenwert  $v$  ist. Da  $\hat{V}$  nicht entartet ist, muss

$$\hat{W}|\phi\rangle = w|\phi\rangle \quad (40)$$

gelten, d.h.  $|\phi\rangle$  ist auch ein Eigenvektor von  $\hat{W}$ . Für diesen Zustand  $|\phi\rangle$  gilt dann aber, dass

$$\langle\hat{V}\rangle = \langle\phi|\hat{V}|\phi\rangle = v\langle\phi|\phi\rangle = v \quad (41)$$

und

$$\langle\hat{V}^2\rangle\langle\phi|\hat{V}^2|\phi\rangle = v^2\langle\phi|\phi\rangle = v^2 \equiv \langle\hat{V}\rangle^2. \quad (42)$$

Analoges gilt auch für den Operator  $\hat{W}$ . Nach der Definition der Unschärfe (vgl. Gleichung (19)) gilt dann aber:

$$\Delta\hat{V} = 0 = \Delta\hat{W}, \quad (43)$$

d.h. misst man am Zustand  $|\phi\rangle$  zunächst<sup>8</sup> die Messgröße  $\hat{V}$  und dann die Messgröße  $\hat{W}$ , so lassen sich beide ohne Unschärfe messen. Insbesondere erhält man für einen gemeinsamen Eigenzustand der Observablen  $\hat{V}, \hat{W}$  bei jeder Messung dieser Observablen immer die gleichen Messwerte.

Der Grund warum dies so funktioniert liegt in der Ausnutzung Vertauschbarkeit von  $\hat{V}, \hat{W}$  in Gleichung (39). Man beachte zudem, dass sich beide Messgrößen nur dann genau messen lassen, wenn sich das System in einem Eigenzustand der Operatoren befindet. Ist hingegen der Zustand  $|\phi\rangle$  eine Linearkombination verschiedener Vektoren der Eigenbasis, so ist die Unschärfe für beide Operatoren wieder ungleich 0.

---

<sup>8</sup>Natürlich kann die Reihenfolge der Messungen auch andersherum sein oder, wenn es möglich ist, können auch beide Observablen gleichzeitig gemessen werden.

Im Allgemeinen ist es jedoch nicht möglich ein System in einem Zustand zu präparieren, sodass die Unschärfe für zwei beliebige Observablen bei der Messung jeweils gleich 0 ist. Die minimale (statistische) Unschärfe ist dann gegeben durch die Heisenbergsche Unschärferelation.

**Satz 3.1. Heisenbergsche Unschärferelation**

Sind  $\hat{A}, \hat{B}$  zwei hermitesche Operatoren, so gilt

$$\Delta\hat{A}\Delta\hat{B} \geq \frac{1}{2}|\langle\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\rangle| \quad (44)$$

Beweis: (in Anlehnung an [3], S. 53 f.)

Das Ziel ist es, eine untere Schranke für das Produkt der Unschärfen anzugeben. Dazu definiert man die Operatoren

$$\hat{a} = \hat{A} - \langle\hat{A}\rangle \quad \text{und} \quad \hat{b} = \hat{B} - \langle\hat{B}\rangle. \quad (45)$$

Da  $\hat{A}, \hat{B}$  hermitesch sind, gilt

$$\hat{a}^\dagger = (\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)^\dagger = \hat{A}^\dagger - \langle\hat{A}\rangle^* = \hat{A} - \langle\hat{A}\rangle = \hat{a} \quad (46)$$

und analog auch  $\hat{b} = \hat{b}^\dagger$ .

Wegen

$$\langle\hat{M}^\dagger\hat{M}\rangle = \langle\psi|\hat{M}^\dagger\hat{M}|\psi\rangle = \langle\psi'|\psi'\rangle = |\psi'|^2 \geq 0 \quad (47)$$

mit  $|\psi'\rangle = \hat{M}|\psi\rangle$ , gilt für  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $\hat{c} := -i(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})$ :

$$\begin{aligned} \langle\hat{a}^2\rangle - \lambda\langle\hat{c}\rangle + \lambda^2\langle\hat{b}^2\rangle &= \langle\hat{a}^2 + \lambda i(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) + \lambda^2\hat{b}^2\rangle \\ &= \langle\hat{a}^2 + \lambda i[\hat{A}\hat{B} - \hat{A}\langle\hat{B}\rangle - \langle\hat{A}\rangle\hat{B} + \langle\hat{A}\rangle\langle\hat{B}\rangle \\ &\quad - \hat{B}\hat{A} + \hat{B}\langle\hat{A}\rangle + \langle\hat{B}\rangle\hat{A} - \langle\hat{B}\rangle\langle\hat{A}\rangle] + \lambda^2\hat{b}^2\rangle \\ &= \langle\hat{a}^2 + i\lambda(\hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a}) + \lambda^2\hat{b}^2\rangle = \langle(\hat{a} - i\lambda\hat{b})(\hat{a} + i\lambda\hat{b})\rangle \\ &= \langle(\hat{a} + i\lambda\hat{b})^\dagger(\hat{a} + i\lambda\hat{b})\rangle \geq 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Dieser Ausdruck wird minimal, wenn

$$\frac{d}{d\lambda}(\langle\hat{a}^2\rangle - \lambda\langle\hat{c}\rangle + \lambda^2\langle\hat{b}^2\rangle) = -\langle\hat{c}\rangle + 2\lambda\langle\hat{b}^2\rangle = 0, \quad (49)$$

d.h. wenn

$$\lambda = \frac{\langle\hat{c}\rangle}{2\langle\hat{b}^2\rangle}. \quad (50)$$

Setzt man nun diesen Wert für  $\lambda$  in Gleichung (48) ein, so erhält man

$$0 \leq \langle \hat{a}^2 \rangle - \frac{\langle \hat{c} \rangle^2}{2\langle \hat{b}^2 \rangle} + \frac{\langle \hat{c} \rangle^2 \langle \hat{b}^2 \rangle}{4\langle \hat{b}^2 \rangle^2} = \langle \hat{a}^2 \rangle - \frac{\langle \hat{c} \rangle^2}{4\langle \hat{b}^2 \rangle}. \quad (51)$$

Umformen und einsetzen der Definitionen von  $\hat{a}$  und  $\hat{b}$  ergibt schließlich

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\langle \hat{c} \rangle^2 &\leq \langle \hat{A}^2 - 2\hat{A}\langle \hat{A} \rangle + \langle \hat{A} \rangle^2 \rangle \cdot \langle \hat{B}^2 - 2\hat{B}\langle \hat{B} \rangle + \langle \hat{B} \rangle^2 \rangle \\ &= (\langle \hat{A}^2 \rangle - 2\langle \hat{A} \rangle \langle \hat{A} \rangle + \langle \hat{A} \rangle^2) \cdot (\langle \hat{B}^2 \rangle - 2\langle \hat{B} \rangle \langle \hat{B} \rangle + \langle \hat{B} \rangle^2) \\ &= (\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2) \cdot (\langle \hat{B}^2 \rangle - \langle \hat{B} \rangle^2) \\ &= (\Delta \hat{A})^2 \cdot (\Delta \hat{B})^2. \end{aligned} \quad (52)$$

Hieraus folgt direkt

$$\Delta \hat{A} \Delta \hat{B} \geq \frac{1}{2} |\langle \hat{c} \rangle| = \frac{1}{2} |\langle \hat{A} \hat{B} - \hat{B} \hat{A} \rangle|. \quad (53)$$

□

### 3.2 Das EPR-Paradoxon

Albert Einstein war mit der Kopenhagener Deutung der Quantenphysik und der Unschärferelation nicht einverstanden. Insbesondere die Tatsache, dass eine Messgröße erst dann einen zufälligen Wert annimmt, wenn man eine Messung durchführt störte ihn. Mit mehreren Argumentation versuchte er daher zu zeigen, dass die quantenphysikalische Beschreibung der Realität (noch) falsch bzw. unvollständig sei.

Den Höhepunkt der Versuche die Quantenmechanik als unvollständig bzw. falsch zu entlarven, bildete der 1935 zusammen mit Boris Podolsky und Nathan Rosen veröffentlichte Artikel „Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?“ [10], dessen Inhalt als EPR-Paradoxon bekannt wurde.

In ihrer Argumentation betrachten Einstein, Podolsky und Rosen zwei Systeme, welche während eines Zeitraums  $\Delta T$  wechselwirken können und danach separiert werden, sodass keinerlei Wechselwirkung zwischen ihnen mehr möglich ist. Anhand der Wellenfunktion des Gesamtsystems und der beiden Teilsysteme legen sie anschließend dar, warum ihrer Meinung nach die quantenmechanische Beschreibung der physikalischen Realität durch die Wellenfunktionen unvollständig sei.

Die Überlegungen von Podolsky, Rosen und Einstein führen zu dem (falschen) Schluss,

dass die gesamte Information über den Zustand des Gesamtsystems lokal, d.h. in jedem der beiden Teilsysteme in Form einer (noch) nicht messbaren Variablen vorliegen muss. Eine solche Theorie, bei der die Information lokal in Form von verborgenen, d.h. von der momentanen quantenmechanischen Beschreibung der Realität nicht erfassten Variablen vorliegt bezeichnet man als lokal deterministisch bzw. als Theorie mit lokalen verborgenen Variablen.

Das EPR-Paradoxon wurde in den ersten Jahren nach seiner Veröffentlichung kaum beachtet. Man versuchte die Problematik eher unter den Teppich zu kehren als sich wirklich mit ihr auseinanderzusetzen. So erwiderte Niels Bohr 1935 [11], dass bei dem Experiment die Messapparatur(en) und das Messobjekt bzw. die Messobjekte ein unteilbares Gesamtsystem bilden. Folglich können die Messapparatur(en) nicht mehr klassisch betrachtet werden. Eine wechselwirkungsfreie Messung, wie sie Einstein, Podolsky und Rosen in ihrem Aufsatz verwendeten sei daher nicht möglich.

Der Grund für die eher stiefmütterliche Behandlung des EPR-Paradoxons war, dass es zunächst keine Möglichkeit gab, um zu überprüfen, ob Einstein recht hatte oder nicht. 1957 erläuterten Bohm und Aharonov in [12] das EPR-Paradoxon anhand eines hypothetischen Experimentes, bei welchem ein Molekül, welches aus zwei Atomen mit Spin  $\frac{1}{2}$  besteht und den Gesamtspin 0 besitzt, durch eine Methode, welche den Spin nicht beeinflusst, getrennt wird. Durch die Trennung des Moleküls bewegen sich die beiden Atome in unterschiedliche Richtungen fort und müssten, da der Spin nicht beeinflusst wurde, nach wie vor den Gesamtspin 0 besitzen. Nachdem die Entfernung zwischen beiden Atomen so groß geworden ist, dass sie nicht mehr wechselwirken können, wird der Spin eines der beiden Atome gemessen, wodurch der des anderen auf Grund des Gesamtspins festgelegt sein muss.

Zur Zeit der Veröffentlichung war es jedoch noch nicht möglich, ein entsprechendes Experiment durchzuführen. Daher betrachteten sie ein anderes Experiment, mit welchem sich überprüfen ließ, ob das EPR-Paradoxon überhaupt eintreten könne. Dieses Experiment war die Elektron-Positron-Vernichtung, bei welcher gleichzeitig zwei Photonen in entgegengesetzte Richtungen emittiert werden. Dabei ist die Polarisation der beiden Photonen immer orthogonal zueinander. Basierend auf den emittierten Photonen dieser Vernichtungsreaktion könnte getestet werden, ob die quantenmechanische Beschreibung zwangsläufig zu dem EPR-Paradoxon führt, oder ob es eine Beschreibung gibt, mit welcher das Paradoxon vermieden werden kann.

In [12] verweisen Bohm und Aharonov auf die experimentelle Realisierung der Elektron-Positron-Vernichtungsreaktion sowie die experimentelle Untersuchung der dabei entstehenden Strahlung durch Wu und Shakhnov [13]. Die dabei erhaltenen Resultate verglichen Bohm und Aharonov mit ihren für verschiedene Theorien berechneten Werten und konnten so zeigen, dass die aktuelle Beschreibung der Quantenmechanik, welche zu dem EPR-Paradoxon führt, die von Wu und Shakhnov gemachten Beobachtungen treffend erklärt, wohingegen alternativen Beschreibungen der Quantenmechanik dies nicht gelingt.

Dennoch war damit noch geklärt, ob die quantenmechanische Beschreibung der physikalischen Realität wirklich vollständig ist, oder ob es noch verborgene Variablen gibt. Einen Schritt in Richtung der Überprüfung machte der Physiker John Bell mit der Bellschen Ungleichung (siehe Kapitel 3.5).

Zunächst ist es jedoch notwendig, Systeme wie in dem von Bohm und Aharonov in [12] vorgeschlagenen, aber damals noch nicht durchführbaren Experiment, näher zu betrachten.

### 3.3 Verschränkung

Betrachtet man in der Quantenmechanik ein System, welches aus zwei Teilchen besteht, so wird dieses durch den Hilbert-Raum  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  modelliert, wobei  $\mathcal{H}_1$  das erste Teilchen und  $\mathcal{H}_2$  das zweite Teilchen beschreibt (vgl. Kapitel 2). Der Zustand des Systems lautet dann allgemein

$$|\phi\rangle = \sum_{ij} c_{ij} |ij\rangle. \quad (54)$$

Dieser Zustand lässt sich auch schreiben als

$$|\phi\rangle = \sum_i |i\rangle \sum_j c_{ij} |j\rangle. \quad (55)$$

Ist der Zustand des ersten Teilchens dabei unabhängig von dem des zweiten, d.h. gilt  $P(|i\rangle | |j\rangle) = P(|i\rangle)^*$ , so muss sich dies natürlich auch in Gleichung (55) widerspiegeln. Aus der Forderung der Unabhängigkeit folgt:

$$|c_{ij}|^2 = P(|ij\rangle) = P(|i\rangle)P(|j\rangle), \quad (56)$$

---

\*Mit  $P(|i\rangle)$  wird hier die Wahrscheinlichkeit dafür bezeichnet, dass sich das erste Teilchen im Zustand  $|i\rangle$  befindet. Analog ist  $P(|i\rangle | |j\rangle)$  die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich das erste Teilchen im Zustand  $|i\rangle$  befindet, wenn sich das zweite Teilchen im Zustand  $|j\rangle$  ist.

was bedeutet, dass sich Gleichung (54) schreiben lässt als

$$|\phi\rangle = \left( \sum_i a_i |i\rangle \right) \left( \sum_j b_j |j\rangle \right), \quad (57)$$

mit geeigneten  $a_i, b_j \in \mathbb{C}$ . Diese Schreibweise ist jedoch für  $P(|i\rangle | |j\rangle) \neq P(|i\rangle)$  nicht möglich. Man definiert daher:

**Definition 3.2. Separable und verschränkte Zustände**

*Der Zustandsvektor eines Zweiteilchensystems heißt*

a) **separabel**, wenn es  $a_i, b_j$  gibt, so dass

$$|\phi\rangle = \sum_{ij} c_{ij} |ij\rangle = \left( \sum_i a_i |i\rangle \right) \left( \sum_j b_j |j\rangle \right) \quad (58)$$

b) **verschränkt**, wenn es keine Darstellung wie in a) gibt.

Die Definition der Verschränkung bedeutet nichts anderes als die Tatsache, dass bei einem verschränkten Zustand die Zustände der beiden Teilchen miteinander korreliert sind. Insbesondere hängt das Ergebnis einer Messung am zweiten Teilchen davon ab, ob eine entsprechende Messung am ersten Teilchen vorgenommen wurde und welches Messergebnis dabei herauskam.

Deutlicher wird die Definition der Verschränkung, wenn man sich ein konkretes Beispiel anschaut.

**Beispiel 3.3.**

*Gegeben sei ein Zweiteilchensystem, wobei jedes der Teilchen durch ein Zweizustandssystem mit den orthonormierten Basiszuständen  $|0\rangle, |1\rangle$  beschrieben werden kann.*

a) *Der Zustand*

$$|\Theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0, 0\rangle + |0, 1\rangle) \quad (59)$$

ist separabel, denn es gilt

$$|\Theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle + |0,1\rangle) + 0 \cdot (|1,0\rangle + |1,1\rangle) \quad (60)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle(|0\rangle + |1\rangle) + 0 \cdot |1\rangle(|0\rangle + |1\rangle) \quad (61)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + 0|1\rangle\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \quad (62)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \quad (63)$$

b) Die vier normierten Zustände

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle \pm |1,0\rangle) \quad (64)$$

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle \pm |1,1\rangle) \quad (65)$$

sind verschränkt. Am Beispiel von  $|\Psi^+\rangle$  kann man dies leicht erkennen, denn angenommen er wäre separabel, d.h. es gäbe  $a_0, a_1, b_0, b_1 \in \mathbb{C}$  so dass  $|\Psi^+\rangle = (a_0|0\rangle + a_1|1\rangle) \otimes (b_0|0\rangle + b_1|1\rangle)$ , dann wäre

$$|\Psi^+\rangle = a_0b_0|00\rangle + a_0b_1|01\rangle + a_1b_0|10\rangle + a_1b_1|11\rangle. \quad (66)$$

Folglich muss gelten:

$$a_0b_0 = a_1b_1 = 0 \text{ und } a_0b_1 = a_1b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (67)$$

Jedoch schließen sich diese Bedingungen gegenseitig aus, denn wäre einer der Koeffizienten  $a_0, a_1, b_0, b_1$  gleich Null, so müsste eines der Produkte  $a_0b_1, a_1b_0$  gleich Null sein. Folglich ist  $|\Psi^+\rangle$  verschränkt. Analoge Rechnungen zeigen, dass auch die anderen drei Zustände verschränkt sind. Diese vier Zustände werden auch **Bell-Zustände** genannt.

Die vier Bell-Zustände, welche im Beispiel b) betrachtet wurden sind linear unabhängig, denn projiziert man einen der Zustände auf einen der anderen, d.h. bildet man die Skalarprodukte  $\langle\Psi^+|\Psi^-\rangle, \langle\Psi^+|\Phi^+\rangle, \langle\Psi^+|\Phi^-\rangle, \langle\Psi^-|\Phi^+\rangle, \langle\Psi^-|\Phi^-\rangle, \langle\Phi^+|\Phi^-\rangle$ , so erhält man immer den selben Wert, nämlich 0. Folglich sind die Vektoren nicht nur linear unabhängig sondern auch noch orthogonal zueinander. Dies bedeutet jedoch, dass sie eine Orthonormalbasis<sup>9</sup> des betrachteten Hilbert-Raumes bilden.

<sup>9</sup>Die Normierung folgt aus  $\langle 1|1\rangle = \langle 0|0\rangle = 1$ .



Bei den möglichen Zuständen eines Systems ist es nicht immer leicht zu erkennen, ob ein Zustand verschränkt ist oder nicht. Dies liegt vor allem daran, dass die Faktoren eines separablen Zustandes meist nicht offensichtlich sind. Um in solchen Fällen einfacher beurteilen zu können, ob ein Zustand separabel oder verschränkt ist, wäre es daher sinnvoll, wenn man ein einfaches Kriterium hätte, mit dem man Verschränkung nachweisen kann.

### 3.4 Verschränkungsmaße

Neben den Bell-Zuständen gibt es natürlich auch noch andere verschränkte Zustände. Sei zum Beispiel  $0 \leq \varepsilon < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , dann ist der nicht normierte Zustand

$$|\Psi_\varepsilon^-\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon\right)|0, 1\rangle + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon\right)|1, 0\rangle \quad (68)$$

immer noch verschränkt, da das Ergebnis einer Messung am zweiten Teilchen immer noch davon abhängt, ob eine entsprechende Messung am ersten Teilchen vorgenommen wurde und welches Messergebnis dabei erhalten wurde. Es fällt jedoch auf, dass für immer größer werdende Werte von  $\varepsilon$  der Zustand  $|0, 1\rangle$  immer wahrscheinlicher und damit die Abhängigkeit der Messergebnisse immer geringer wird. Zudem ist der Grenzfall

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 1/\sqrt{2}} |\Psi_\varepsilon^-\rangle = \sqrt{2}|0, 1\rangle \quad (69)$$

nicht mehr verschränkt.

Dieses Verhalten von  $|\Psi_\varepsilon^-\rangle$  in Abhängigkeit von  $\varepsilon$  könnte man als „Abnahme der Verschränkung“ bezeichnen, und motiviert gleichzeitig die Einführung eines Maßes für die Verschränkung. Aber wie sieht so ein Maß aus bzw. welche Eigenschaften muss es erfüllen?

Eine Eigenschaft ist bereits offensichtlich: Für separable Zustände muss das Verschränkungsmaß gleich null sein. Ferner sollte die der Grad der Verschränkung eines Zustands nicht von der gewählten Orthonormalbasis des Hilbert-Raumes abhängig sein

**Definition 3.4. Verschränkungsmaß**

*Eine Abbildung  $E : \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  heißt **Verschränkungsmaß**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind (vgl. [14]):*

1. Für jeden separablen Zustand  $|\xi\rangle$  gilt

$$E(|\xi\rangle) = 0. \quad (70)$$

2. Für jeden Zustand  $|\phi\rangle$  und jede unitäre Transformation  $\hat{U} := \hat{U}_1 \otimes \hat{U}_2$  die Bedingung

$$E(|\phi\rangle) = E((\hat{U}_1 \otimes \hat{U}_2)|\phi\rangle) \quad (71)$$

erfüllt ist.

3. Für die aus einem Zustand  $|\phi\rangle$  nur durch lokale Operationen und klassische Kommunikation erzeugbaren Zustände  $|\phi_i\rangle$  gilt:

$$E(|\phi\rangle) \geq \sum_i p_i E(|\phi_i\rangle), \quad (72)$$

wobei  $p_i$  die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass sich das System nach der Durchführung der lokalen Operationen und der klassischen Kommunikation im Zustand  $|\phi_i\rangle$  befindet.

4. Für ein System, welches aus zwei Paaren verschränkter Teilchen zusammensetzt und sich im Zustand  $|\Theta\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle$  befindet gilt:

$$E(|\Theta\rangle) = E(|\phi_1\rangle) + E(|\phi_2\rangle). \quad (73)$$

Es gibt noch andere Forderungen, welche von einigen Physikern an Verschränkungsmaße gestellt werden. Eine dieser Forderungen ist beispielsweise die Berechenbarkeit, d.h. dass das Verschränkungsmaß relativ leicht mit einem Computer berechnen lässt. Für diese Arbeit wurden die Eigenschaften wie in [14] gefordert. Weitere Forderungen und wesentlich mehr Theorie zu Verschränkungsmaßen findet man beispielsweise in [15] ab S. 156.

Im Folgenden werden exemplarisch zwei Verschränkungsmaße vorgestellt. Das erste ist die sogenannte **Concurrence**. Um sie definieren zu können, ist es wichtig, sich vor Augen zu führen, dass jeder Zustand für ein Zweiteilchensystem, bei welchem jedes Teilchen durch ein Zweizustandssystem mit der Orthonormalbasis  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  beschrieben werden kann, die Form

$$|\Psi\rangle = \alpha|0, 0\rangle + \beta|0, 1\rangle + \gamma|1, 0\rangle + \delta|1, 1\rangle \quad (74)$$

mit  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$  besitzt. Damit erhält man die Definition der Concurrence.

**Definition 3.5. Concurrence**

Gegeben sei der Zustand aus Gleichung (74). Dann definiert man die **Concurrence**

$$C : \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathbb{R}^+ : |\Psi\rangle \mapsto C(|\Psi\rangle) := 2|\alpha\delta - \beta\gamma|. \quad (75)$$

Man kann zeigen, dass die Concurrence wirklich ein Verschränkungsmaß ist. An dieser Stelle sei jedoch nur der folgende Satz bewiesen.

**Satz 3.6.** *Ein Zustand  $|\Psi\rangle$  ist genau dann separabel, wenn  $C(|\Psi\rangle) = 0$  gilt.*

Beweis:

In der folgenden Argumentation beachte man, dass ein separabler Zustand die Form

$$|\Psi\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle)(c|0\rangle + d|1\rangle) \quad (76)$$

besitzt.

„ $\Rightarrow$ “ Da  $|\Psi\rangle$  separabel ist, gilt

$$|\Psi\rangle = ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle, \quad (77)$$

somit lässt sich die Concurrence mit gemäß Gleichung (75) bestimmen zu

$$C(|\Psi\rangle) = 2|acbd - adbc| = 0. \quad (78)$$

„ $\Leftarrow$ “ Sei nun  $C(|\Psi\rangle) = 0$ . In der Notation von Gleichung (75) gilt dann  $\alpha\delta = \beta\gamma$ . Das Ziel ist nun die Vorfaktoren aus Gleichung (74) durch  $\alpha, \beta, \gamma$  und  $\delta$  auszudrücken. Dazu verwendet man die Überlegungen aus Gleichung (77) und setzt  $\alpha = ac, \beta = ad, \gamma = bc, \delta = bd$ . Dies ergibt die folgenden Gleichungen:

$$a = \frac{\beta}{d}, \quad b = \frac{\delta}{d}, \quad c = \frac{\alpha}{a} = \frac{\alpha}{\beta}d. \quad (79)$$

Wenn nun der Zustand separabel sein soll, so müssen beide Faktoren normiert sein. Dies ergibt insbesondere die Bedingung

$$1 = |a|^2 + |b|^2 = \left|\frac{\beta}{d}\right|^2 + \left|\frac{\delta}{d}\right|^2 = \frac{|\beta|^2 + |\delta|^2}{|d|^2}. \quad (80)$$

Auflösen nach  $d$  ergibt

$$d = \sqrt{|\beta|^2 + |\delta|^2}, \quad (81)$$

wodurch alle vier Vorfaktoren  $a, b, c, d$  wohldefiniert und eindeutig bestimmt sind.

Der Zustand  $|\Psi\rangle$  ist also separabel.  $\square$

Ferner kann man zeigen, dass die Concurrence für normierte Zustände maximal den Wert 1 annehmen kann. Man definiert daher:

**Definition 3.7. Maximal verschränkte Zustände**

Ein Zustand  $|\phi\rangle$  heißt **maximal verschränkt**, wenn  $C(|\phi\rangle) = 1$  gilt.

Zur Veranschaulichung der Concurrence soll das folgende Beispiel dienen:

**Beispiel 3.8.**

a) Die vier Bell-Zustände  $|\Psi^\pm\rangle, |\Phi^\pm\rangle$  sind maximal verschränkt, denn es gilt

$$C(|\Psi^-\rangle) = C\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0, 1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle\right) = 2\left|0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| = 1 \quad (82)$$

analog folgt  $C(|\Psi^+\rangle) = C(|\Phi^\pm\rangle) = 1$ .

b) Der zu Beginn des Abschnittes über Verschränkungsmaße betrachtete Zustand

$$|\Psi_\varepsilon^-\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon\right)|0, 1\rangle + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon\right)|1, 0\rangle \quad (83)$$

ist für  $0 \leq \varepsilon < \frac{1}{\sqrt{2}}$  verschränkt und genau dann maximal verschränkt, wenn  $\varepsilon = 0$ , denn

$$C(|\Psi_\varepsilon^-\rangle) = 2\left|0 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon\right)\right| = 2\underbrace{\left|\frac{1}{2} - \varepsilon^2\right|}_{>0} > 0 \quad (84)$$

und man sieht sofort, dass  $C(|\Psi_\varepsilon^-\rangle) = 1 \Leftrightarrow \varepsilon = 0$ .

Das zweite Verschränkungsmaß, welche hier vorgestellt werden soll, ist die **Entropie**. Bevor diese definiert werden kann, ist es notwendig einen weiteren Formalismus der Quantenmechanik einzuführen: Den **Dichteoperator**.

Für einige Anwendungen in der Quantenmechanik ist die Darstellung eines Zustandes in Form eines Vektors unpraktisch. Daher geht man zu einer anderen Darstellung über, welche praktischer ist, jedoch dieselben Informationen über den Zustand beinhaltet wie der entsprechende Vektor.

**Definition 3.9. Dichteoperator**

Sei  $\{|i\rangle \mid i = 1, \dots, n\}$  eine Orthonormalbasis von  $\mathcal{H}$  und  $|\phi\rangle = \sum_{i=1}^n c_i |i\rangle \in \mathcal{H}$  ein normierter Vektor, dann definiert man den **Dichteoperator** von  $|\phi\rangle$  als

$$\hat{\rho}_\phi = |\phi\rangle\langle\phi|. \quad (85)$$

Es fällt sofort auf, dass der Dichteoperator dieselbe Form hat, wie der Projektor  $\hat{P}_{|\phi\rangle}$ . In der Tat ist er identisch mit dem Projektor, weshalb er auch dieselben Eigenschaften besitzt. Die wichtigsten sind in folgendem Lemma zusammengefasst:

**Lemma 3.10. Eigenschaften des Dichteoperators**

Für den Dichteoperator  $\hat{\rho}_\phi$  gilt

- a)  $\hat{\rho}_\phi^\dagger = \hat{\rho}_\phi$
- b)  $Tr(\hat{\rho}_\phi) := \sum_{i=1}^n \langle i | \hat{\rho}_\phi | i \rangle = 1$
- c) Sei  $0 \leq \theta < 2\pi$ , dann gilt  $\hat{\rho}_\phi = \hat{\rho}_{e^{i\theta}\phi}$ .

Beweis: Einen Beweis findet man in [5] S. 348 f. □

Wie alle linearen Operatoren über endlichdimensionalen Hilberträumen kann man  $\hat{\rho}_\phi$  auch als Matrix schreiben. Sie wird besonders einfach, wenn  $\rho_\phi$  diagonalisiert<sup>10</sup>, d.h. in seiner Eigenbasis dargestellt worden ist. Die Spur  $Tr(\hat{\rho}_\phi)$  ist dabei die Summe der Einträge auf der Diagonale der Matrix.

Im folgenden wird der Dichteoperator bzw. synonym die Dichtematrix für ein System der Form  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  benötigt, wobei jeder Zustand  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$  natürlich den Zustand jedes der beiden Teilchen, welche das System bilden, beinhaltet. Da  $|\phi\rangle$  im Allgemeinen aber nicht separabel sein muss, kann man  $\hat{\rho}_\phi$  nicht als

$$\hat{\rho}_{\phi_1} \otimes \hat{\rho}_{\phi_2} = |\phi_1\rangle\langle\phi_1| \otimes |\phi_2\rangle\langle\phi_2| \quad (86)$$

schreiben. Dennoch ist es in manchen Fällen notwendig, die Dichtematrix für eines der beiden Teilchen auszurechnen, obwohl der Zustand nicht separabel ist. In diesen Fällen behilft man sich dann mit der **reduzierten Dichtematrix**.

---

<sup>10</sup>Die Diagonalisierbarkeit wird in Anhang B.1 gezeigt.

**Definition 3.11. Reduzierte Dichtematrix**

Gegeben sei ein System, bestehend aus den Teilchen  $A, B$ , welches durch den Hilbert-Raum  $\mathcal{H} := \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  beschrieben wird und sich im Zustand  $|\Theta\rangle$  befindet. Ferner sei  $\{|i\rangle \mid i = 1, \dots, n\}$  eine Basis von  $\mathcal{H}_A$  und  $\{|j\rangle \mid j = 1, \dots, m\}$  eine Basis von  $\mathcal{H}_B$ . Dann definiert man die **reduzierte Dichtematrix** von  $\hat{\rho}_\Theta$  bzgl. des Systems von Teilchen  $A$  als:

$$\hat{\rho}_{\Theta_A} := \sum_{j=1}^m \langle j | \hat{\rho}_\Theta | j \rangle := \text{Tr}_B(\hat{\rho}_\Theta). \quad (87)$$

Diese Definition scheint auf den ersten Blick seltsam, wird jedoch durch das folgende Beispiel klarer.

**Beispiel 3.12.**

Betrachtet wird das Zweiteilchensystem  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , wobei die Vektoren  $|0\rangle, |1\rangle$  sowohl eine Orthogonalbasis von  $\mathcal{H}_A$  als auch von  $\mathcal{H}_B$  bilden. Ein normierter Zustand  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$  hat dann die Form

$$|\phi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|0, 1\rangle + \gamma|1, 0\rangle + \delta|1, 1\rangle = (\alpha|0\rangle_A + \gamma|1\rangle_A)|0\rangle_B + (\beta|0\rangle_A + \delta|1\rangle_A)|1\rangle_B, \quad (88)$$

wobei  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$  gilt, und die Indizes  $A, B$  verdeutlichen sollen, zu welchem Teilchen welcher Zustand gehört.

Zur Vereinfachung sei nun  $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$  und  $\delta = 0$ . Der zu  $|\phi\rangle$  gehörige Dichteoperator hat dann die Form

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_\phi &= |\phi\rangle\langle\phi| = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( (|0\rangle_A + |1\rangle_A)|0\rangle_B + |0\rangle_A|1\rangle_B \right) \frac{1}{\sqrt{3}} \left( (\langle 0|_A + \langle 1|_A)\langle 0|_B + \langle 0|_A\langle 1|_B \right) \\ &= \frac{1}{3} \left[ (|0\rangle_A + |1\rangle_A)|0\rangle_B (\langle 0|_A + \langle 1|_A)\langle 0|_B + (|0\rangle_A + |1\rangle_A)|0\rangle_B \langle 0|_A \langle 1|_B \right. \\ &\quad \left. + (|0\rangle_A + |1\rangle_A)|1\rangle_B (\langle 0|_A + \langle 1|_A)\langle 0|_B + (|0\rangle_A + |1\rangle_A)|1\rangle_B \langle 0|_A \langle 1|_B \right] \end{aligned} \quad (89)$$

und somit erhält man

$$\hat{\rho}_{\phi_A} = \frac{1}{3} \left[ \underbrace{\langle 0|0\rangle_B}_{=1} (|0\rangle_A + |1\rangle_A) (\langle 0|_A + \langle 1|_A) \underbrace{\langle 0|0\rangle_B}_{=1} + \underbrace{\langle 0|0\rangle_B}_{=1} (|0\rangle_A + |1\rangle_A) \underbrace{\langle 0|_A}_{=0} \underbrace{\langle 1|0\rangle_B}_{=0} \right. \quad (90)$$

$$\left. + \underbrace{\langle 1|1\rangle_B}_{=1} (|0\rangle_A + |1\rangle_A) (\langle 0|_A + \langle 1|_A) \underbrace{\langle 0|1\rangle_B}_{=0} + \underbrace{\langle 1|1\rangle_B}_{=1} (|0\rangle_A + |1\rangle_A) \underbrace{\langle 0|_A}_{=1} \underbrace{\langle 1|1\rangle_B}_{=1} \right] \quad (91)$$

$$= \frac{1}{3} \left( (|0\rangle_A + |1\rangle_A) (\langle 0|_A + \langle 1|_A) + (|0\rangle_A + |1\rangle_A) \langle 0|_A \right) \quad (92)$$

$$= \frac{2}{3} \left( |0\rangle_A \langle 0|_A + |1\rangle_A \langle 0|_A \right) + \frac{1}{3} \left( |0\rangle_A \langle 1|_A + |1\rangle_A \langle 1|_A \right) \quad (93)$$

$$\equiv \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}. \quad (94)$$

Mithilfe der Dichtematrix lässt sich nun die Entropie eines Zustandsvektors definieren, welche mit schließlich ein weiteres Verschränkungsmaß ergeben wird.

**Definition 3.13. von-Neumann-Entropie**

Sei  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$  ein Zustandsvektor, dann definiert man die **von-Neumann-Entropie** als

$$S(\hat{\rho}_\phi) := -\text{Tr}(\hat{\rho}_\phi \ln(\hat{\rho}_\phi)), \quad (95)$$

wobei  $\ln$  für den natürlichen Logarithmus steht und seine Definition für Operatoren in Anhang A.1.3 zu finden ist.

Die von-Neumann-Entropie kann als Verschränkungsmaß verwendet werden. Dazu betrachtet man einen Zustand  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  und die sich daraus ergebende Beschreibung der Zustände für Teilchen  $A$  und Teilchen  $B$ .

**Definition 3.14. Entropie der Verschränkung**

Sei  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  und  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ , dann definiert man die **Entropie der Verschränkung**

$$S_E : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}^+ : |\phi\rangle \mapsto S_E(|\phi\rangle) := S(\hat{\rho}_{\phi_A}) = -\text{Tr}(\hat{\rho}_{\phi_A} \ln(\hat{\rho}_{\phi_A})). \quad (96)$$

Zunächst zwei Beispiele für die Berechnung der Entropie der Verschränkung.

**Beispiel 3.15.**

a) Für die vier Bell-Zustände ist die Entropie der Verschränkung gleich  $\ln(2)$ , denn für

$|\Psi^+\rangle$  gilt:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{\Psi^+} &= \frac{1}{2} \left( |1,0\rangle + |0,1\rangle \right) \left( \langle 1,0| + \langle 0,1| \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( |1,0\rangle\langle 1,0| + |1,0\rangle\langle 0,1| + |0,1\rangle\langle 1,0| + |0,1\rangle\langle 0,1| \right).\end{aligned}\quad (97)$$

Somit ist die reduzierte Dichtematrix gegeben durch

$$\hat{\rho}_{\Psi_A^+} = {}_B\langle 0|\hat{\rho}_{\Psi^+}|0\rangle_B + {}_B\langle 1|\hat{\rho}_{\Psi^+}|1\rangle_B = \frac{1}{2} \left( |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\quad (98)$$

Durch analoge Rechnungen kann man zeigen, dass für alle vier Bell-Zustände die reduzierte Dichtematrix gegeben ist durch Gleichung (98) und somit alle Bell-Zustände die selbe Entropie der Verschränkung, nämlich

$$\begin{aligned}S_E(|\Psi^+\rangle) &= -Tr \left( \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ln(\frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & \ln(\frac{1}{2}) \end{pmatrix} \right) \\ &= -Tr \left( \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \ln(2) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \ln(2) \end{pmatrix} \right) \\ &= \ln(2)\end{aligned}\quad (99)$$

besitzen.

- b) Für einen separablen Zustand  $|\phi\rangle$  ist die Entropie der Verschränkung gleich Null, denn die Dichtematrix eines separablen Zustandes  $|\phi\rangle = |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle$  gilt:

$$\hat{\rho}_\phi = \left( |\phi_A\rangle\langle\phi_B| \right) \left( |\phi_A\rangle\langle\phi_B| \right) = |\phi_A\rangle\langle\phi_A| \otimes |\phi_B\rangle\langle\phi_B| = \hat{\rho}_{\phi_A} \otimes \hat{\rho}_{\phi_B}.\quad (100)$$

Damit ergibt sich die reduzierte Dichtematrix zu

$$\hat{\rho}_{\phi_A} = \sum_{j=1}^m \langle j|\hat{\rho}_\phi|j\rangle = \sum_{j=1}^m \langle j|\hat{\rho}_{\phi_A} \otimes \hat{\rho}_{\phi_B}|j\rangle = \hat{\rho}_{\phi_A}.\quad (101)$$

Stellt man nun  $\hat{\rho}_{\phi_A}$  in seiner Eigenbasis dar, so gilt  $\hat{\rho}_{\phi_A} = \text{diag}(1, 0, \dots, 0)$  (vgl. Anhang B.1) und wegen  $0 \cdot \ln(0) := 0$  folgt:

$$S_E(|\phi\rangle) = -Tr(\hat{\rho}_{\phi_A} \ln(\hat{\rho}_{\phi_A})) = -Tr(\text{diag}(1 \cdot \ln(1), 0 \cdot \ln(0), \dots, 0 \cdot \ln(0))) = 0,\quad (102)$$



*d.h. die Entropie der Verschränkung nimmt für separable Zustände den Wert Null an.*

Dass diese Definition wirklich ein Maß für die Verschränkung liefert, ist nicht offensichtlich. In der Tat ist es auch schwierig, die geforderten Eigenschaften nachzuweisen. Einzig die Invarianz unter unitären Transformationen ist offensichtlich: Sie ergibt sich aus der Invarianz der Dichtematrizen.

Eine Beweisskizze dafür, dass die Entropie auch die anderen Kriterien eines Verschränkungsmaßes erfüllt, findet man in [15] ab Seite 160.

Auch stellt sich die Frage, ob die Definition sinnvoll ist, da hierfür nur das Teilchen  $A$  verwendet wurde. Man kann jedoch zeigen, dass  $S(\hat{\rho}_{\phi_A}) = S(\hat{\rho}_{\phi_B})$  gilt, d.h. es ist irrelevant, welches Teilchen man für die Definition verwendet.

Die Theorie über Verschränkungsmaße könnte an dieser Stelle noch beliebig ausgedehnt werden, würde dann aber den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Zum Abschluss dieses Abschnittes sei noch darauf hingewiesen, dass es neben den Verschränkungsmaßen auch noch Verschränkungskriterien gibt. Diese liefern zwar meist keine quantitative Aussage über den Grad der Verschränkung, jedoch kann man mit ihnen ebenfalls relativ leicht überprüfen, ob ein Zustand separabel ist oder nicht. Einen Einblick in die Verschränkungskriterien erhält man beispielsweise in [16].

### 3.5 Die Bellsche Ungleichung

Mithilfe der Theorie zur Verschränkung kann nun die Frage nach der Vollständigkeit der Quantenmechanik, wie sie von Einstein im EPR-Paradoxon aufgeworfen wurde, endlich beantwortet werden.

Der irische Physiker John Bell fand eine Möglichkeit, wie man entscheiden konnte, ob die quantenmechanische Beschreibung der Realität korrekt ist, oder ob es verborgene Variablen gibt. Sein Ergebnis, die Bellsche Ungleichung [17], konnte experimentell überprüft werden und deutlich zeigen, dass die quantenmechanische Beschreibung korrekt ist.

Aber der Reihe nach. Betrachtet wird erneut das von Bohm und Aharonov in [12] vorgeschlagene (Gedanken-)Experiment. Es geht dabei um ein zweiatomiges Molekül, welches

den Gesamtspin  $S = 0$  besitzt. Wird dieses nun in die beiden Atome  $A$  und  $B$  zerteilt, ohne dabei den Spin zu beeinflussen, so muss der Gesamtspin des Zweiteilchensystems nach der Trennung immer noch gleich null sein. Folglich befindet sich das System im Zustand

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle \pm |\downarrow\uparrow\rangle), \quad (103)$$

wobei  $\uparrow, \downarrow$  die Ausrichtung des jeweiligen Spins bezüglich der Messachse angibt.

Im Folgenden sei angenommen, dass sich das System im Zustand  $|\Psi^-\rangle$  befindet.

Sind nun die beiden Atome weit genug voneinander entfernt, so wird an beiden eine Spinmessung durchgeführt. Geht man von einer Theorie mit verborgenen Variablen aus, so muss der Spin in jeder Richtung einen von Anfang an festgelegten, eindeutig bestimmten Wert besitzen. Misst man nun also den Spin in  $x$ -Richtung und anschließend in  $z$ -Richtung, so sind beide Werte bereits im Vorfeld eindeutig festgelegt. Insbesondere auch die entsprechenden Werte für das zweite Atom  $B$ .

Angenommen, es wäre möglich an beiden Atomen den Spin in  $x$ -Richtung und anschließend in  $z$ -Richtung zu messen, d.h. man kann an beiden Atomen die Messgrößen  $S_x, S_z$ , welche jeweils so normiert wurden, dass sie nur die Werte  $\pm 1$  annehmen können, nacheinander messen. Dann definiert man die Kontrollgröße

$$\Gamma = (S_{Ax} + S_{Az})S_{Bx} - (S_{Ax} - S_{Az})S_{Bz} = \pm 2^\ddagger, \quad (104)$$

wobei die Indizierung deutlich macht, welche Messgröße zu Atom  $A$  bzw.  $B$  gehört. Geht man von einer Theorie mit verborgenen Variablen aus, so gilt wegen  $P(\Gamma = 2) + P(\Gamma = -2) = 1$  für den Erwartungswert von  $\Gamma$ :

$$\langle \Gamma \rangle = (P(\Gamma = 2) \cdot 2) + (P(\Gamma = -2) \cdot (-2)) = 2 \underbrace{(P(\Gamma = 2) - P(\Gamma = -2))}_{\in[-1,1]}.$$

---

<sup>‡</sup>Dass  $S = \pm 2$  gilt, sieht man folgendermaßen: Haben  $S_{Ax}$  und  $S_{Az}$  dasselbe Vorzeichen, so verschwindet der zweite Summand. Sind hingegen die Vorzeichen verschieden, so nimmt der erste Summand den Wert 0 an. Da  $|S_{Ax}| = |S_{Az}| = |S_{Bx}| = |S_{Bz}| = 1$ , folgt direkt  $S = \pm 2$ .

Dies führt zu

$$2 \geq |\langle \Gamma \rangle| = |\langle (S_{Ax} + S_{Az})S_{Bx} - (S_{Ax} - S_{Az})S_{Bz} \rangle| \quad (105)$$

$$= |\langle S_{Ax}S_{Bx} \rangle + \langle S_{Az}S_{Bx} \rangle - \langle S_{Ax}S_{Bz} \rangle + \langle S_{Az}S_{Bz} \rangle|, \quad (106)$$

welches ein Beispiel einer Bellschen Ungleichung ist. Jedoch ist dies nicht das ursprüngliche Resultat von Bell, welches er in [17] veröffentlichte, sondern eine von Clauser, Horne, Shimony und Holt modifizierte Variante [18], welche als CHSH-Ungleichung bezeichnet wird, und sich experimentell einfacher überprüfen lässt.

Da diese Ungleichung basierend auf einer Theorie mit lokalen verborgenen Variablen hergeleitet wurde, ist sie unabhängig von der relativen Ausrichtung der Detektoren von für Atom A und B. Insbesondere gilt sie, wenn das Koordinatensystem, in welchem der Spin von Atom B gemessen wird, um den Winkel  $\theta$  gegen das Koordinatensystem für die Messung an Atom A gedreht ist.

Betrachtet man nun das Experiment quantenmechanisch, so wird der Spin, wie jede andere quantenmechanische Messgröße, durch hermitesche Operatoren beschrieben. Im Fall des Spins in  $x, y, z$ -Richtung sind die Operatoren die drei hermiteschen Spinmatrizen

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (107)$$

von welchen im folgenden nur  $\hat{\sigma}_x$  und  $\hat{\sigma}_z$  benötigt werden.

Es fällt auf, dass  $\hat{\sigma}_z$  bereits diagonalisiert ist, d.h. die für die Darstellung der drei Matrizen gewählte Basis ist die normierte Eigenbasis von  $\hat{\sigma}_z$ . Ferner besitzen alle drei Matrizen die Eigenwerte  $\pm 1$ .

Nun aber zurück zu der Spinmessung an dem Zweiteilchensystem im Zustand  $|\Psi^-\rangle$ , wobei  $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$  die normierte Eigenbasis von  $\hat{\sigma}_z$  sei, d.h.  $\hat{\sigma}_z|\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle$ ,  $\hat{\sigma}_z|\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle$  und  $\langle\uparrow|\uparrow\rangle = \langle\downarrow|\downarrow\rangle = 1$ .

Die Spinmessung an Atom A wird dann durch die Operatoren

$$\hat{S}_{Ax} = \hat{\sigma}_x \otimes \mathbb{1} \quad (108)$$

für den Spin in  $x$ -Richtung und

$$\hat{S}_{Az} = \hat{\sigma}_z \otimes \mathbb{1} \quad (109)$$

für den Spin in  $z$ -Richtung beschrieben. Die Operatoren für die Messung an Atom  $B$  sind, je nach Wahl des Koordinatensystems relativ zu dem für die Messung an Atom  $A$ , etwas komplizierter.

Im folgenden sei das Koordinatensystem, in welchem die Messung an Atom  $B$  vorgenommen wird, um den Winkel  $\theta = 45^\circ$  gegen das von Koordinatensystem von Atom  $A$  gedreht. Der Spin in  $z$ -Richtung des Koordinatensystems von  $B$  hat dann im Koordina-

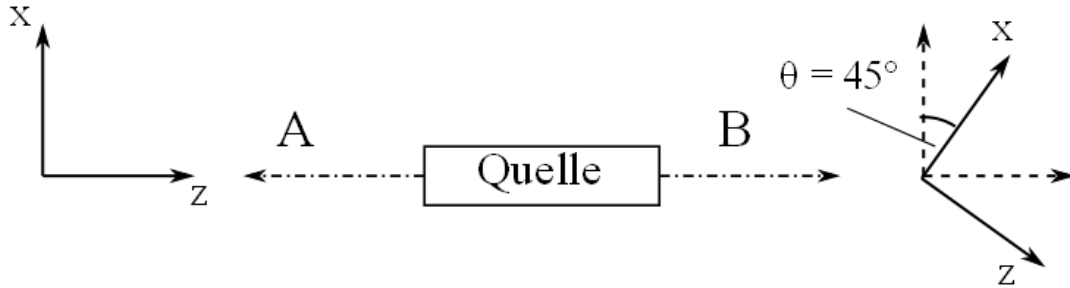


Abbildung 1: Veranschaulichung der Wahl der Koordinatensysteme für die Messungen an Atom  $A$  und  $B$ .

tensystem von  $A$  die Form

$$|\uparrow\rangle \mapsto \begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & \sin(45^\circ) \\ -\sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{pmatrix} |\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle). \quad (110)$$

Analog ergibt sich  $|\downarrow\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ . Folglich können die Spinmessungen an Atom  $B$  durch

$$\hat{S}_{Bx} = \mathbb{1} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_x) \quad (111)$$

$$\hat{S}_{Bz} = \mathbb{1} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\sigma}_z - \hat{\sigma}_x) \quad (112)$$

beschrieben werden. Der Betrag des quantenmechanische Erwartungswert ergibt sich daher zu

$$\begin{aligned}
 |\langle \Gamma \rangle| &= |\langle \Psi^- | \Gamma | \Psi^- \rangle| \\
 &= |\langle \Psi^- | [(\hat{S}_{Ax} + \hat{S}_{Az})\hat{S}_{Bx} - (\hat{S}_{Ax} - \hat{S}_{Az})\hat{S}_{Bz}] | \Psi^- \rangle| \\
 &= |\langle \Psi^- | \hat{S}_{Ax}\hat{S}_{Bx} | \Psi^- \rangle + \langle \Psi^- | \hat{S}_{Az}\hat{S}_{Bx} | \Psi^- \rangle - \langle \Psi^- | \hat{S}_{Ax}\hat{S}_{Bz} | \Psi^- \rangle + \langle \Psi^- | \hat{S}_{Az}\hat{S}_{Bz} | \Psi^- \rangle|.
 \end{aligned} \tag{113}$$

An dieser Stelle wird nur einer der vier Erwartungswerte exemplarisch ausgerechnet. Die anderen Rechnungen sind analog und genauso langwierig, weshalb sie in dieser Arbeit nicht ausgeführt werden. Es gilt für  $\langle \hat{S}_{Az}\hat{S}_{Bx} \rangle$ :

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{S}_{Az}\hat{S}_{Bx} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle \uparrow\downarrow | - \langle \downarrow\uparrow |) \hat{S}_{Az}\hat{S}_{Bx} \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \underbrace{\langle \uparrow\downarrow | \hat{S}_{Az} \hat{S}_{Bx} | \uparrow\downarrow \rangle}_{=\langle \uparrow\downarrow \rangle} - \underbrace{\langle \uparrow\downarrow | \hat{S}_{Az} \hat{S}_{Bx} | \downarrow\uparrow \rangle}_{=\langle \uparrow\downarrow \rangle} - \underbrace{\langle \downarrow\uparrow | \hat{S}_{Az} \hat{S}_{Bx} | \uparrow\downarrow \rangle}_{=-\langle \uparrow\downarrow \rangle} + \underbrace{\langle \downarrow\uparrow | \hat{S}_{Az} \hat{S}_{Bx} | \downarrow\uparrow \rangle}_{=-\langle \uparrow\downarrow \rangle} \right] \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[ \langle \uparrow\downarrow | (\mathbf{1} \otimes (\sigma_z + \sigma_x)) | \uparrow\downarrow \rangle - \langle \uparrow\downarrow | (\mathbf{1} \otimes (\sigma_z + \sigma_x)) | \downarrow\uparrow \rangle \right. \\
 &\quad \left. + \langle \downarrow\uparrow | (\mathbf{1} \otimes (\sigma_z + \sigma_x)) | \uparrow\downarrow \rangle - \langle \downarrow\uparrow | (\mathbf{1} \otimes (\sigma_z + \sigma_x)) | \downarrow\uparrow \rangle \right] \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[ \langle \uparrow\downarrow | (|\uparrow\rangle(-|\downarrow\rangle + |\uparrow\rangle)) - \langle \uparrow\downarrow | (|\downarrow\rangle(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)) \right. \\
 &\quad \left. + \langle \downarrow\uparrow | (|\uparrow\rangle(-|\downarrow\rangle + |\uparrow\rangle)) - \langle \downarrow\uparrow | (|\downarrow\rangle(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)) \right] \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[ \langle \uparrow\downarrow | \uparrow\uparrow \rangle - \langle \uparrow\downarrow | \uparrow\downarrow \rangle - \langle \uparrow\downarrow | \downarrow\uparrow \rangle - \langle \uparrow\downarrow | \downarrow\downarrow \rangle + \langle \downarrow\uparrow | \uparrow\uparrow \rangle - \langle \downarrow\uparrow | \uparrow\downarrow \rangle \right. \\
 &\quad \left. - \langle \downarrow\uparrow | \downarrow\uparrow \rangle - \langle \downarrow\uparrow | \downarrow\downarrow \rangle \right] \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}.
 \end{aligned} \tag{114}$$

Durch analoge Rechnungen erhält man  $\langle \hat{S}_{Az}\hat{S}_{Bz} \rangle = \langle \hat{S}_{Ax}\hat{S}_{Bx} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  und  $\langle \hat{S}_{Ax}\hat{S}_{Bz} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Damit gilt für den quantenmechanischen Erwartungswert von  $\Gamma$ :

$$|\langle \Gamma \rangle| = \left| -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right| = 2\sqrt{2}, \tag{115}$$

was im Widerspruch zur CHSH-Ungleichung (vgl. Gleichung (106)) steht.

Durch die geeignete Wahl der Detektorausrichtungen kann man also experimentell die Existenz lokaler verborgener Variablen widerlegen.

Allerdings ließ sich das Gedankenexperiment von Bohm, welches bei der Herleitung der CHSH-Ungleichung betrachtet wurde, nicht realisieren. Es wurden daher im Laufe der Zeit ähnliche Versuche entwickelt, welche experimentell durchgeführt werden konnten und eine Verletzung der Bellschen Ungleichung nachweisen sollten. Letztere Unsicherheiten beseitigte jedoch erst das Aspect-Experiment, welches 1981 von Alain Aspect, Philippe Grangier und Gérard Roger durchgeführt wurde. In [8] und [9] veröffentlichten sie ihre Ergebnisse, welche zeigten, dass die, von Einstein im EPR-Paradoxon angezweifelte, Vollständigkeit der Quantenmechanik gegeben ist. Es gibt also keine Beschreibung der Realität mit lokalen verborgenen Variablen.

### 3.6 Erzeugung verschränkter Photonen

Versuche zur Überprüfung der Bellschen Ungleichung wurden meist mit Photonen durchgeführt. Diese Photonen sind dann nicht bezüglich ihres Spins, sondern bezüglich ihrer Polarisation verschränkt.

Aber nicht nur zur Überprüfung der Bellschen Ungleichung, sondern auch für viele andere Experimente mit verschränkten Teilchen werden Photonen verwendet. Einer der Gründe hierfür ist die Tatsache, dass Paare verschränkter Photonen relativ leicht erzeugt werden können. Im Folgenden soll exemplarisch für die Verfahren zur Erzeugung verschränkter Teilchen die am meisten verwendete Methode zur Erzeugung verschränkter Photonen erläutert werden.

Trifft ein Laserpuls auf einen Beta-Bariumbromat-Kristall (kurz: BBO-Kristall), so werden die meisten Photonen diesen Kristall ungehindert durchlaufen. Einige Photonen erfahren jedoch spontane parametrische Fluoreszenz (engl.: spontaneous parametric down-conversion) mit Typ-II-Phasenanpassung, in welcher das Photon in zwei Photonen mit niedrigeren Frequenzen aufgeteilt wird<sup>11</sup>. Die daraus resultierenden Photonen der einzelnen Paare haben eine zueinander orthogonale Polarisation und werden in Richtungen emittiert, welche innerhalb zweier Kegel liegen (siehe Abbildung 2). Variiert man den Winkel  $\theta$  zwischen der optischen Achse des BBO-Kristalls und dem einfallenden Laserpuls, so kann man die Lage der begrenzenden Kegel verändern. Eine Verkleinerung von  $\theta$  ermöglicht die komplette räumliche Trennung der Kegel, wohingegen eine Vergrößerung dazu führt, dass sich die beiden Kegel entlang zweier Geraden schneiden.

---

<sup>11</sup>Auf Grund der Energieerhaltung muss die Summe der Frequenzen dieser Photonen gleich der Frequenz des ursprünglichen Photons sein.

Das Besondere an den Schnittgeraden ist die Tatsache, dass die entlang dieser Geraden emittierten Photonenpaare aus verschränkten Photonen bestehen. Daher wird ein solcher, von einem gepulsten UV-Laser gepumptter BBO-Kristall in vielen Experimenten zur Erzeugung verschränkter Photonen eingesetzt.

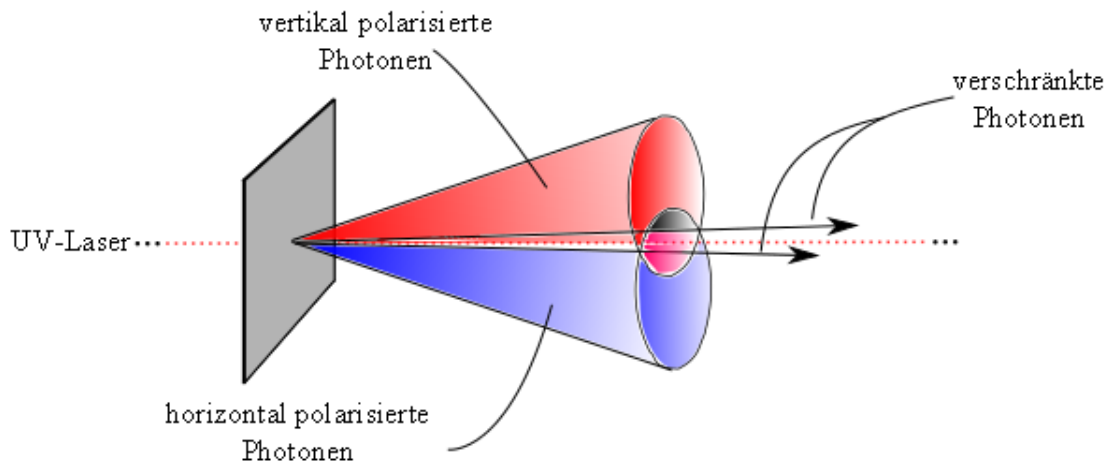


Abbildung 2: Erzeugung verschränkter Photonen mit einem BBO-Kristall (hier blau dargestellt); eigene Darstellung in Anlehnung an [19].

Eine ausführlichere Beschreibung dieser Quelle für verschränkte Photonen findet man in [19]. Die spontane parametrische Fluoreszenz, ein Effekt der nichtlinearen Optik, wird in [20] ausführlich erläutert.

An dieser Stelle sei noch erwähnt, dass bereits 1999 Kwiat et al. in [21] eine Verbesserung dieser Quelle für verschränkte Photonen vorstellten. Bei der verbesserten Variante werden zwei gleiche, sich an einer Seitenfläche berührende BBO-Kristalle verwendet. Sind einfallenden Photonen im  $45^\circ$ -Winkel polarisiert, d.h. befinden sie sich im Zustand  $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\leftrightarrow\rangle)$ , so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die spontane parametrische Fluoreszenz mit Typ-I-Phasenanpassung<sup>12</sup> im ersten BBO-Kristall stattfindet genauso groß wie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie im zweiten Kristall erfolgt. So lange man nicht feststellen kann, in welchem der Kristalle mit der spontanen parametrischen Fluoreszenz die Photonenpaare erzeugt wurden, befinden sich die einzelnen Photonenpaare im

<sup>12</sup>Bei der Typ-I-Phasenanpassung haben die Photonen der erzeugten Paare immer dieselbe Polarisation. Eine detailliertere Beschreibung findet man ebenfalls in [20].

Zustand  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\leftrightarrow, \leftrightarrow\rangle + e^{i\alpha}|\uparrow, \uparrow\rangle)$ . Die in dem Koeffizienten auftretende Phase  $\alpha$  wird unter anderem durch die Dicke der Kristalle bestimmt und kann mit einfachen experimentellen Mitteln (z.B. durch Kippen der Kristalle) variiert werden. Der Vorteil dieser Quelle gegenüber der von Zeilinger et al. in [19] vorgestellten, ist die Tatsache, dass die Photonen der Paare nicht nur dann verschränkt sind, wenn sie entlang zweier bestimmter Geraden emittiert werden, sondern dass jedes der emittierten Photonenpaare einer bestimmten Wellenlänge aus verschränkten Photonen besteht.



## 4 Quantenteleportation

Der Begriff der Teleportation wurde besonders durch die Fernsehserie *Star Trek* sowie die zugehörigen Kinofilme geprägt und fand so Eingang in den Sprachgebrauch der breiten Bevölkerung. In *Star Trek* wird jedoch nicht nur von Teleportation, sondern synonym auch von Beamen gesprochen. Daher kennen die meisten Menschen die Teleportation meist unter dem Begriff Beamen.

Natürlich wurden durch *Star Trek* auch Vorstellungen über die Teleportation bei den Zuschauern erzeugt. Aber welche Vorstellungen zur Teleportation haben die Zuschauer der Fernsehserie bzw. der Filme?

Als Beispiel für die Teleportation in *Star Trek* sei hier das folgende Bild, welches aus der Fernsehserie *Star Trek* (dt. „Raumschiff Enterprise“) stammt, gegeben.



Abbildung 3: Darstellung der Teleportation in *Star Trek*. Quelle: [22] (aufgerufen am 15.07.2012)

Für die Teleportation in *Star Trek* ist typisch, dass die zu teleportierende Person zu Beginn des Transportvorgangs fast durchsichtig wird und sich anschließend langsam auflöst. Diese Auflösung (siehe Abbildung 3) wird durch weiße Punkte, deren Zahl zunimmt und sich über den ganzen Körper verteilen, dargestellt. Sobald sich die Person komplett aufgelöst hat, beginnt am Zielort der inverse Prozess. Langsam beginnen farbige Pixel zu erscheinen, welche nach kurzer Zeit die Umrisse einer Person erkennen lassen und schließlich sich zu der zu teleportierten Person zusammensetzen.

Wie genau der Transport der Materie vom Start- zum Zielort erfolgt, oder ob die Person aus am Zielort vorhandener Materie zusammengesetzt wird, bleibt offen. Lediglich, dass die Person an einem Ort aufgelöst und an einem anderen wieder zusammengesetzt wird, kann anhand der Darstellung in den Filmen bzw. den Serien eindeutig beantwortet werden.

Dennoch stellt das Beamen eine interessante Art des Transportes dar und würde Reisen über große Distanzen nicht nur bequemer, sondern auch deutlich schneller machen. Es stellt sich daher vor allem die zentrale Frage: Ist diese Teleportation technisch und damit insbesondere physikalisch möglich?

So schön es wäre, wenn man binnen Sekundenbruchteilen von einem Ort zum anderen teleportiert werden könnte, so unmöglich ist es. Durch das Auflösen an einem Ort und exakte Zusammensetzen des Körpers am Zielort müssten große Mengen an Informationen gespeichert werden, denn ein menschlicher Körper besteht aus ca.  $10^{13} - 10^{14}$  Zellen, welche sich aus kleineren Bausteinen, den Atomen und diese wiederum aus Protonen, Elektronen und Neutronen zusammensetzen. Um nun den Körper wieder exakt zusammensetzen, benötigt man die Information über den Ort und den Zustand jeder Zelle des Körpers und damit jedes Protons, Elektrons und Neutrons, aus dem sich jede der Zellen zusammensetzt. Das Speichern von so vielen Informationen stellt momentan eine unüberwindliche Hürde dar und wird vermutlich auch noch lange eine solche Hürde bleiben.

Für die folgenden Überlegungen sei vorausgesetzt, dass es möglich wäre ein so große Menge an Informationen zu speichern. Dann stünde man immer noch vor dem Problem an die Informationen zu kommen. Hierfür gibt es eine ganz einfache Lösung: Der Zustand<sup>13</sup> jedes Protons, Elektrons und Neutrons muss exakt bestimmt, d.h. exakt gemessen werden. Jedoch würde man bei Zuständen, die aus einer Superposition von verschiedenen Basiszuständen bestehen, nicht immer denselben Messwert erhalten. Stattdessen erhält man bei einem Zustand

$$|\gamma\rangle = \sum_{i=1}^N c_i |a_i\rangle,$$

wobei  $|a_1\rangle, \dots, |a_N\rangle$  eine Eigenbasis des zur Messgröße gehörenden hermiteschen Operators  $\hat{A}$  bilden, mit der Wahrscheinlichkeit  $|c_i|^2$  den Messwert  $a_i$ . Folglich ist es in solchen Fällen nicht möglich den exakten Zustand mit nur einer Messung zu bestimmen. Man müsste mehrfach an ein und demselben Zustand die Messung vornehmen, um den Zustand zu ermitteln.

---

<sup>13</sup>Der Zustand setzt sich aus verschiedenen Teilen u.a. Ort, Impuls, Spin usw. zusammen.

Das Problem dabei ist jedoch, dass durch die Messung der Zustand natürlich vernichtet wird. Man kann also mit einer erneuten Messung an ein und demselben Teilchen keine weiteren Informationen über den Zustand  $|\gamma\rangle$  erhalten. Um also viele Messungen an dem Zustand vorzunehmen, ohne diesen dabei zu verändern, müsste man eine entsprechende Anzahl von Kopien, d.h. identische Teilchen, welche sich in demselben Zustand wie das ursprüngliche Teilchen befinden, erzeugen, wobei keine Messung an dem Zustand vorgenommen werden darf. Der Zustand ist also vor, während und nach der Erzeugung der Kopien unbekannt.

Technisch würde dies sicherlich eine große Herausforderung darstellen. Aber ist es überhaupt möglich den Zustand eines Teilchens quasi zu klonen? Wie der folgende Satz zeigt, lautet die Antwort auf diese Frage schlicht und ergreifend: Nein.

**Satz 4.1. *No-Cloning Theorem***

*Es ist nicht möglich einen beliebigen Quantenzustand zu klonen.*

Beweis:

Angenommen es wäre möglich, d.h. es gäbe einen Operator

$$\hat{K} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} : |\chi\rangle \mapsto |\chi\rangle|\chi\rangle = |\chi, \chi\rangle,$$

welcher einen Zustand kopiert. Seien nun  $|a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{H}$  beliebig, dann gilt für den Zustand  $|\zeta\rangle = |a\rangle + |b\rangle$ :

$$\hat{K}|\zeta\rangle = \hat{K}(|a\rangle + |b\rangle) = \hat{K}|a\rangle + \hat{K}|b\rangle = |a, a\rangle + |b, b\rangle. \quad (116)$$

Jedoch gilt andererseits

$$|\zeta\rangle|\zeta\rangle = (|a\rangle + |b\rangle)(|a\rangle + |b\rangle) = |a, a\rangle + |a, b\rangle + |b, a\rangle + |b, b\rangle \neq \hat{K}|\zeta\rangle, \quad (117)$$

was einen Widerspruch zur Annahme darstellt. □

Nun könnte man versuchen den Zustand so zu präparieren, dass er einem gemeinsamen Eigenzustand der relevanten Observablen (z.B. Spin, Ort und Impuls) entspricht und somit durch die Messung nicht verändert wird. Dies hätte zugleich auch den Vorteil, dass man für jede Observable einen exakten Messwert erhalten würde, da die Unschärfe dann

verschwinden würde (vgl. Kapitel 3.1). Jedoch ist dies nicht möglich, da der Orts- und der Impulsoperator nicht verträglich sind und daher keine gemeinsame Eigenbasis besitzen. Nach der Heisenbergschen Unschärferelation ist es daher auch nicht möglich, an einem Teilchen sowohl den Ort als auch den Impuls ohne Unschärfe zu bestimmen.

Nach all diesen Überlegungen scheint es also nicht möglich zu sein, Menschen oder andere Objekte zu beamen, jedenfalls nicht mit den in Star Trek dargestellten Methode.

Wie das folgende Unterkapitel zeigen wird, kann die Quantenphysik und insbesondere die Verschränkung dabei helfen, wenigstens Quantenobjekte zu teleportieren<sup>14</sup>.

## 4.1 Bennetts Protokoll

In [23] beschreiben Bennett, Brassard et al. eine Möglichkeit, mit der man zwar nicht makroskopische Objekte teleportieren kann, wohl aber kleine Quantenobjekte. Ihr Protokoll wurde bereits mehrfach experimentell realisiert, wobei der Schlüssel für die erfolgreiche Teleportation in der geeigneten Verwendung verschränkter Teilchen (Photonen) liegt.

Im folgenden wird das Protokoll von Bennett erläutert. Dabei wird, wie in allen Bereichen der Informationstheorie üblich, der Sender einer Nachricht (in diesem Fall der Besitzer des zu teleportierenden Quantenobjektes) mit Alice und der Empfänger mit Bob bezeichnet.

Alice besitzt das zu teleportierende Teilchen, welches für die folgenden Überlegungen ein Photon im normierten Zustand

$$|\phi\rangle = c_t|\uparrow\rangle + c_h|\leftrightarrow\rangle \tag{118}$$

mit  $|c_t|^2 + |c_h|^2 = 1$  sei, wobei  $|\uparrow\rangle$  für die vertikale und  $|\leftrightarrow\rangle$  für die horizontale Polarisation steht. Der Zustand  $|\phi\rangle$  selbst ist Alice unbekannt.

Nun teilen Alice und Bob ein Paar maximal verschränkter Photonen, d.h. Alice erhält das eine, Bob das andere Photon des maximal verschränkten Photonenpaares. Hier sei zunächst ohne Beschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt, dass das verschränkte Paar

---

<sup>14</sup>Wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird, ist die Teleportation jedoch nicht mit dem Transport von Materie gleichzusetzen. Vielmehr wird nur der Zustand des Quantenobjektes teleportiert.

sich im Bell-Zustand

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow, \leftrightarrow\rangle - |\leftrightarrow, \uparrow\rangle) \quad (119)$$

befindet. Das gesamte System besteht nun aus drei Teilchen, welche wir mit den Nummern 1, 2, 3 bezeichnen. Dabei ist das Teilchen mit dem Index 1 das zu teleportierende, das mit dem Index 2 das Teilchen, welches Alice aus dem verschränkten Paar erhalten hat, und das Teilchen mit dem Index 3 ist Bobs Teilchen aus dem verschränkten Paar. Das Gesamtsystem befindet sich also dann im Zustand

$$|\Psi_{123}\rangle = |\phi, \psi^-\rangle = \left(c_t|\uparrow\rangle + c_h|\leftrightarrow\rangle\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow, \leftrightarrow\rangle - |\leftrightarrow, \uparrow\rangle)\right). \quad (120)$$

Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen erhält man hieraus

$$|\Psi_{123}\rangle = \frac{c_t}{\sqrt{2}}(|\uparrow, \uparrow, \leftrightarrow\rangle - |\uparrow, \leftrightarrow, \uparrow\rangle) + \frac{c_h}{\sqrt{2}}(|\leftrightarrow, \uparrow, \leftrightarrow\rangle - |\leftrightarrow, \leftrightarrow, \uparrow\rangle). \quad (121)$$

Aber wie wird nun von Alice das Teilchen 1 zu Bob teleportiert?

Die Lösung ist aus mathematischer Sicht einfach, in der experimentellen Realisierung schwierig, und für die meisten Menschen ein Mysterium: Alice führt eine Bell-Messung an ihren Teilchen 1 und 2 durch und teilt Bob das Ergebnis ihrer Messung auf einem klassischen Kanal (z.B. per Telefon) mit.

Um zu erklären warum dies funktioniert, sei der Vorgang zunächst aus der mathematischen Sicht betrachtet. Dadurch ergibt sich zunächst eine Begründung, warum es funktionieren sollte. Die experimentelle Umsetzung wird dann im folgenden Abschnitt erläutert.

Der Zustand des Systems wird durch Gleichung (121) beschrieben. Dieser Zustandsvektor ist ein Element des Hilbertraumes  $\mathcal{H} := \text{Lin}\{|\uparrow\rangle, |\leftrightarrow\rangle\} \otimes \text{Lin}\{|\uparrow\rangle, |\leftrightarrow\rangle\} \otimes \text{Lin}\{|\uparrow\rangle, |\leftrightarrow\rangle\}$ . Eine natürliche Wahl für die Basis dieses Hilbertraumes sind die acht Produktzustände

$$|\uparrow, \uparrow, \uparrow\rangle, |\uparrow, \uparrow, \leftrightarrow\rangle, |\uparrow, \leftrightarrow, \uparrow\rangle, |\leftrightarrow, \uparrow, \uparrow\rangle, |\uparrow, \leftrightarrow, \leftrightarrow\rangle, |\leftrightarrow, \uparrow, \leftrightarrow\rangle, |\leftrightarrow, \leftrightarrow, \uparrow\rangle, |\leftrightarrow, \leftrightarrow, \leftrightarrow\rangle.$$

Der Systemzustand in Gleichung (121) ist auch in dieser Basis dargestellt. Jedoch ist es aus mathematischer Sicht möglich, eine andere Basis des Hilbertraumes zu wählen, und den Zustand in dieser Basis darzustellen.

Wählt man nun als Basis die Zustände

$$|\Psi_{12}^+, \uparrow\downarrow\rangle, |\Psi_{12}^+, \leftrightarrow\rangle, |\Psi_{12}^-, \uparrow\downarrow\rangle, |\Psi_{12}^-, \leftrightarrow\rangle, |\Phi_{12}^+, \leftrightarrow\rangle, |\Phi_{12}^-, \uparrow\downarrow\rangle, |\Phi_{12}^-, \leftrightarrow\rangle,$$

wobei  $|\Psi_{12}^\pm\rangle, |\Phi_{12}^\pm\rangle$  die (gemeinsamen) Bell-Zustände der Teilchen 1 und 2 sind, so nimmt der Zustand aus Gleichung (121) die Form<sup>15</sup>

$$\begin{aligned} |\Psi_{123}\rangle = \frac{1}{2} & \left[ |\Psi_{12}^+\rangle(-c_t|\uparrow\rangle + c_h|\leftrightarrow\rangle) - |\Psi_{12}^-\rangle(c_t|\uparrow\rangle + c_h|\leftrightarrow\rangle) \right. \\ & \left. + |\Phi_{12}^+\rangle(c_t|\leftrightarrow\rangle - c_h|\uparrow\downarrow\rangle) + |\Phi_{12}^-\rangle(c_t|\leftrightarrow\rangle + c_h|\uparrow\downarrow\rangle) \right] \end{aligned} \quad (122)$$

an. Führt nun Alice eine Bell-Messung an ihren Photonen durch, d.h. bestimmt sie den Bell-Zustand, in welchen sich die Photonen befinden, so tritt das ein, was man häufig als „Kollaps der Wellenfunktion“ bezeichnet, d.h. der Zustand aus Gleichung (122) reduziert sich zu einem einzigen Summanden.

Angenommen, Alice findet heraus, dass sich ihre Photonen im Zustand  $|\Psi_{12}^-\rangle$  befinden, so ist das System im Zustand

$$|\check{\Psi}_{123}^{(1)}\rangle = \frac{1}{2}|\Psi_{12}^-\rangle(-c_t|\uparrow\rangle - c_h|\leftrightarrow\rangle), \quad (123)$$

d.h. Bobs Photon befindet sich im Zustand

$$|\psi_3^{(1)}\rangle = \frac{1}{2}(c_t|\uparrow\rangle + c_h|\leftrightarrow\rangle) = -\frac{1}{2}|\phi\rangle. \quad (124)$$

Der Zustand von Bobs Photon entspricht (bis auf einen konstanten Vorfaktor) dem Zustand, in welchem sich das zu teleportierende Photon vor der Bell-Messung befand. Aus physikalischer Sicht spielt dieser konstante Vorfaktor jedoch keine Rolle. Folglich war die Teleportation erfolgreich.

Natürlich ist es auch möglich, dass Alice bei ihrer Bell-Messung einen der drei anderen Bell-Zustände ( $|\Psi_{12}^+\rangle, |\Phi_{12}^\pm\rangle$ ) als Ergebnis erhält. Genau genommen ist jeder der vier Bell-Zustände gleich wahrscheinlich, so dass Alice mit einer Wahrscheinlichkeit von  $\frac{3}{4}$  *nicht* den Zustand  $|\Psi_{12}^-\rangle$  misst. In diesem Fall ist die Teleportation noch nicht erfolgreich abgeschlossen. Es fehlt noch ein kleiner Schritt.

---

<sup>15</sup>Die ausführliche Rechnung findet man im Anhang B.2.

Die folgende Tabelle zeigt, welche anderen Zustände Bobs Photon nach den Bell-Messung annehmen kann:

Alices Ergebnis	Zustand von Bobs Photon
$ \Psi_{12}^+\rangle$	$ \psi_3^{(2)}\rangle := -c_t \uparrow\downarrow\rangle + c_h \leftrightarrow\rangle$
$ \Phi_{12}^-\rangle$	$ \psi_3^{(3)}\rangle := c_h \uparrow\downarrow\rangle + c_t \leftrightarrow\rangle$
$ \Phi_{12}^+\rangle$	$ \psi_3^{(4)}\rangle := -c_h \uparrow\downarrow\rangle + c_t \leftrightarrow\rangle$

Tabelle 1: Die anderen möglichen Ergebnisse und Zustände von Bobs Photon.

In dieser Auflistung wurde zur Vereinfachung der Darstellung der hier unwichtige konstante Vorfaktor  $\frac{1}{2}$  weggelassen.

Es fällt auf, dass die  $|\psi_3^{(i)}\rangle$  für  $i = 2, 3, 4$  zwar dieselben Koeffizienten wie  $|\phi\rangle$  besitzen, jedoch sind diese zum Teil vertauscht und besitzen im Falle von  $|\psi_3^{(2)}\rangle$  und  $|\psi_3^{(3)}\rangle$  auch noch unterschiedliche Vorzeichen. Diese drei Zustände sind folglich kein skalares Vielfaches von  $|\phi\rangle$ .

Allerdings lassen sich diese drei Zustände relativ einfach aus  $|\phi\rangle$  erzeugen. Bob muss lediglich seine Messbasis verändern, d.h. eine unitäre Transformation an seinem Photon durchführen. Es gelten die folgenden Zusammenhänge:

$$\begin{aligned}
 |\psi_3^{(2)}\rangle &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} |\phi\rangle \\
 |\psi_3^{(3)}\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} |\phi\rangle \\
 |\psi_3^{(4)}\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} |\phi\rangle
 \end{aligned} \tag{125}$$

Die drei Matrizen, mit welchen man aus  $|\phi\rangle$  die Zustände  $|\psi_3^{(2)}\rangle, |\psi_3^{(3)}\rangle, |\psi_3^{(4)}\rangle$  erhält, besitzen eine sehr einfache Form und sind offensichtlich orthogonal, insbesondere also unitär. Da für eine unitäre Matrix  $\hat{U}$  die Beziehung  $\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$  gilt (vgl. Kapitel 2), sind diese Matrizen invertierbar.

Bob muss nun die Inversen der Transformationen, welche zu  $|\psi_3^{(i)}\rangle$  führen bestimmen und anwenden, um daraus den Zustand  $|\phi\rangle$  zu erhalten. Er kann also durch eine unitäre Transformation den Zustand  $|\phi\rangle$  erzeugen.

Wenn Alice ihre Bell-Messung durchgeführt hat, befindet sich Bobs Photon instantan in einem Zustand, aus dem Bob leicht den Zustand  $|\phi\rangle$  erhält. Er weiß jedoch nicht, um welchen Zustand es sich handelt, und folglich nicht, welche unitäre Transformation er anwenden muss. Daher muss Alice ihr Ergebnis der Bell-Messung noch Bob auf einem klassischen Weg mitteilen. Erst wenn Bob das Ergebnis der Bell-Messung kennt und ggf. die notwendige unitäre Transformation durchgeführt hat, ist die Teleportation abgeschlossen.

In der folgenden Tabelle werden Bobs unitäre Transformationen den möglichen Ergebnissen der Bell-Messung zugeordnet.

Ergebnis der Bell-Messung	Zustand von Bobs Photon	nötige unitäre Transformation
$ \Psi_{12}^-\rangle$	$- \phi\rangle$	—
$ \Psi_{12}^+\rangle$	$-c_t \uparrow\downarrow\rangle + c_h \leftrightarrow\rangle$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$ \Phi_{12}^-\rangle$	$c_h \uparrow\downarrow\rangle + c_t \leftrightarrow\rangle$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$ \Phi_{12}^+\rangle$	$-c_h \uparrow\downarrow\rangle + c_t \leftrightarrow\rangle$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Tabelle 2: Übersicht über die möglichen Ergebnisse der Bell-Messung und die für Bob notwendigen unitären Transformationen.

In der Beschreibung von Bennetts Protokoll wurde bisher davon ausgegangen, dass das verschränkte Photonenpaar sich im Zustand  $|\Psi^-\rangle$  befindet. Das Protokoll kann aber auch mit jedem anderen, maximal verschränkten Zustand realisiert werden. Die Zustände in den Gleichungen (121) und (122) sehen in diesem Fällen natürlich anders aus, haben jedoch dieselbe Grundstruktur.



Unabhängig von dem konkret gewählten, maximal verschränkten Zustand, wird Alice bei ihrer Bell-Messung immer noch einen der vier Bell-Zustände messen, lediglich die Zuordnung der Zustände  $|\psi_3^{(i)}\rangle$  kann von der in Tabelle 2 angegebenen abweichen. Bob muss allerdings immer noch in 3 von 4 Fällen eine unitäre Transformation anwenden und diese Transformationen sind dieselben, wie die in Tabelle 2 aufgelisteten.

Auch die Beschränkung auf Photonen, welche wir zu Beginn der Erläuterung von Bennetts Protokoll vorgenommen haben, kann aufgehoben werden. In [23] erläutern Bennett et al. ihr Protokoll anhand von Teilchen mit dem Spin  $\frac{1}{2}$ . Die Beschränkung auf Photonen erfolgte, da mit heutigen Mitteln die Erzeugung verschränkter Photonenpaare einfacher ist, als die Erzeugung verschränkter Paare anderer Quantenobjekte.

Es bleiben noch drei Fragen zur Teleportation offen, welche im folgenden beantwortet werden sollen:

1. Wurde das Quantenobjekt wirklich teleportiert?
2. Ermöglicht die Quantenteleportation Kommunikation und/oder Reisen mit Überlichtgeschwindigkeit?
3. Wurde das No-Cloning Theorem verletzt?

Natürlich ist auch die Frage nach einer experimentellen Realisierung noch offen, da die Quantenteleportation in diesem Abschnitt nur theoretisch beschrieben wurde. Allerdings wird im Abschnitt 4.2 eine experimentelle Realisierung geschildert, so dass an dieser Stelle nur die obigen drei Fragen der Reihe nach beantwortet werden.

#### 4.1.1 Wurde das Quantenobjekt wirklich teleportiert?

Diese Frage ist berechtigt, schließlich wurde ja keine Materie instantan vom einen Ort an einen anderen transportiert. Lediglich der Zustand eines Teilchens bzw. im Kontext einer möglichen Anwendung (siehe Abschnitt 4.5.3), die von Alice in Form des Zustandes kodierte Information, wird transportiert. Dies deckt sich natürlich nicht mit der Darstellung in Star Trek und damit den Vorstellungen der meisten Menschen zur Teleportation.

Aus physikalischer Sicht kann die Frage jedoch mit „Ja“ beantwortet werden. Der Grund

hierfür ist, dass zwei Teilchen der gleichen Sorte, beispielsweise zwei Photonen, Elektronen oder Protonen, welche sich im selben, d.h. identischen Zustand befinden, ununterscheidbar, also identisch sind.

Allerdings kann man die Frage auch philosophisch auffassen oder beantworten. In diesem Fall könnte man sie noch etwas drastischer formulieren: Angenommen es wäre möglich mit Bennetts Protokoll einen Menschen von einem Ort zu einem anderen zu teleportieren, wäre er nach der Teleportation noch derselbe Mensch?

Physikalisch gesehen macht diese Frage keinen Sinn, da in diesem Kapitel bereits dargelegt wurde, dass es unmöglich ist, makroskopische Objekte, d.h. insbesondere Menschen, zu teleportieren. Die Frage bleibt daher in dieser Arbeit unbeantwortet.

### 4.1.2 Ermöglicht die Teleportation Kommunikation und/oder Reisen mit Überlichtgeschwindigkeit?

Im Protokoll der Quantenteleportation befindet sich Bobs Teilchen instantan nach Alices Bell-Messung im zu teleportierenden Zustand  $|\phi\rangle$  oder in einem Zustand, aus dem Bob  $|\phi\rangle$  durch eine unitäre Transformation erhält. Der räumliche Abstand von Alice zu Bob ist dabei ohne Bedeutung.

Dieses Phänomen war auch Albert Einstein nicht geheuer und er bezeichnete es als „spukhafte Fernwirkung“ (vgl. [24] S.210). Aber ist dies konform mit der Relativitätstheorie oder ermöglicht es uns die Kommunikation bzw. Reisen mit Überlichtgeschwindigkeit?

Die Antwort für das Reisen lautet direkt „Nein“. Wie bei der Beantwortung der vorherigen Frage bereits erläutert, erfolgt kein instantaner Transport von Masse. Bobs Photon aus dem verschränkten Paar muss immer noch von der Quelle zu Bob gelangen. Diesen Weg kann es aber maximal mit Lichtgeschwindigkeit zurücklegen.

Bei der Kommunikation greift diese Argument jedoch nicht. Angenommen, das verschränkte Paar wurde von Alice und Bob direkt nach Verlassen der Quelle aufgeteilt und Bob hat sein Teilchen mit sich auf eine lange Reise (o.B.d.A. zur Andromedagalaxie) genommen, während Alice' Teilchen an Ort und Stelle auf der Erde blieb. Nachdem Bob sein Ziel

erreicht hat<sup>16</sup>, führt Alice ihre Bell-Messung durch. Bobs Photon befindet sich danach ja bereits in einem mit  $|\phi\rangle$  eng verwandten Zustand. Würde das nicht eine Kommunikation mit Überlichtgeschwindigkeit ermöglichen?

Die Antwort hier lautet auch „Nein“, denn Bob weiß ja nicht, in welchem der vier Zustände  $|\psi_3^{(i)}\rangle$  sich sein Teilchen befindet. Würde Bob nun einfach Raten und eine der drei unitären Transformationen anwenden (oder auch nicht), so würde er mit einer Wahrscheinlichkeit von  $\frac{3}{4}$  ein falsches Ergebnis erhalten.

Um also ein sinnvolles Ergebnis zu erhalten, muss Bob darauf warten, dass Alice ihm ihr Ergebnis mitteilt. Diese Botschaft kann jedoch maximal mit Lichtgeschwindigkeit übermittelt werden. Eine Kommunikation mit Überlichtgeschwindigkeit ist also nicht möglich.

#### 4.1.3 Wurde das No-Cloning Theorem verletzt?

Diese Frage ergibt sich aus der Überlegung, dass ja keine Masse transportiert wurde, also das zu teleportierende Teilchen sich nach wie vor am selben Ort (bei Alice) befindet, während bei Bob ein identisches Teilchen entsteht.

Allerdings ist die Antwort auf die Frage relativ einfach. Bobs Teilchen befindet sich frühestens nach der Bell-Messung im Zustand  $|\phi\rangle$ . Davor ist es in einem anderen Zustand. Durch Alice Bell-Messung wird der zu teleportierende Zustand bei Alice zerstört, wenn bei Bob der Zustand entsteht.

Es ist sogar noch eindeutiger: Durch die Bell-Messung wird nicht nur Alices Zustand  $|\phi\rangle$  zerstört, sondern auch jegliche Information darüber, in welchem Zustand sich jedes der beiden bei Alice verbliebenen Teilchen befindet. Nur eine Aussage über den gemeinsamen Zustand ist möglich.

Folglich wurde zu keinem Zeitpunkt eine Kopie von Alice Zustand hergestellt. Das No-Cloning Theorem wird also nicht verletzt.

---

<sup>16</sup>Alice kann berechnen, nach welcher Zeit Bob sein Ziel erreicht haben wird, und nimmt an, dass Bob auch zu diesem Zeitpunkt sein Ziel erreicht hat.

## 4.2 Experimentelle Realisierung

Nachdem Bennett et al. 1993 ein Protokoll für die Quantenteleportation vorgeschlagen hatten, dauerte es noch vier Jahre, bis 1997 die erste experimentelle Realisierung erfolgte. Zeilinger et al. veröffentlichten ihre erfolgreiche Realisierung 1998 u.a. in [25] und [26]. Eines der Hauptprobleme bei der Realisierung bildet die gemeinsame Bell-Messung der beiden unabhängigen Photonen von Alice.

Im folgenden betrachten wir zunächst etwas genauer den Versuchsaufbau von Zeilinger et al. wie sie ihn u.a. in [26] beschrieben haben.

In ihrem Experiment erzeugten Zeilinger et al. die verschränkten Photonen mit der in Kapitel 3.6 bereits beschriebenen Methode. Dazu verwendeten sie einen nichtlinearen BBO-Kristall, welchen sie mit einem gepulsten UV-Laser ( $\lambda = 394$  nm, Pulsdauer 200 fs) anregten. Hinter dem Kristall wurde ein Spiegel angebracht, sodass der Laserpuls reflektiert wurde und den Kristall erneut durchlief. Der Abstand von Spiegel und Kristall wurde dabei so gewählt, dass der reflektierte Puls zeitgleich mit dem nächsten Laserpuls am Kristall ankam. Auf diese Art und Weise erzeugten Zeilinger und seine Arbeitsgruppe zeitgleich zwei Paare verschränkter Photonen. Das eine Paar wurde zwischen Alice und Bob aufgeteilt, während eines der Photonen des zweiten Paares den zu teleportierenden Zustand lieferte. Das andere Photon wurde einfach detektiert und diente damit als Signal dafür, dass die Teleportation stattfinden kann.

Ergänzt wird der Versuchsaufbau noch um Spiegel, Strahlteiler, Polarisatoren, Detektoren und  $\lambda/2$ - sowie  $\lambda/4$ -Plättchen, welche zum Teil für die Bell-Messung, zum Teil aber auch für die Präparation des zu teleportierenden Zustandes und den Nachweis erfolgreichen Teleportation benötigt werden.

Die Bell-Messung stellte die größte Herausforderung dar und war mit den damaligen Mitteln noch nicht realisierbar. Zeilinger und sein Team entschieden sich daher für eine Teillösung, die Verwendung der Zweiteilcheninterferenz, welche man beobachten kann, wenn man beide Teilchen an einem Strahlteiler überlagert.

Die genaue Funktionsweise dieser Lösung wird in Abschnitt 4.3 noch genauer erläutert. Wichtig ist zunächst nur, dass es damit möglich ist, zwei der vier Bell-Zustände eindeutig

zu detektieren. Insbesondere der Zustand  $|\Psi^-\rangle$  lässt sich vergleichsweise einfach mit einer Koinzidenzdetektion nachweisen. Daher beschränkte sich Zeilingers Gruppe ausschließlich auf Fälle, in denen Alice diesen Zustand detektierte. Die anderen Fälle wurden verworfen.

Die Einschränkung auf  $|\Psi^-\rangle$  hat zudem den Vorteil, dass in diesem Fall Bob keine unitäre Transformation anwenden muss, um den zu teleportierenden Zustand zu erhalten.

Um die erfolgreiche Teleportation nachzuweisen, präparierte Zeilingers Team den zu teleportierenden Zustand mithilfe eines Polarisators und eines  $\lambda/4$ -Plättchens so, dass die Polarisation nicht orthogonal war. Nach Abschluss der Teleportation wurde an Bobs Teilchen die Polarisation gemessen, um so die Abhängigkeit der Polarisation von dem präparierten Zustand nachzuweisen.

In einem zweiten Schritt zeigten Zeilinger et al., dass es möglich ist, beliebige Quantenzustände zu teleportieren. Hierzu modifizierten Sie ihren Versuchsaufbau leicht, sodass sie die Verschränkung der Photonen 1 und 4 auf die Photonen 3 und 4 teleportieren konnten.

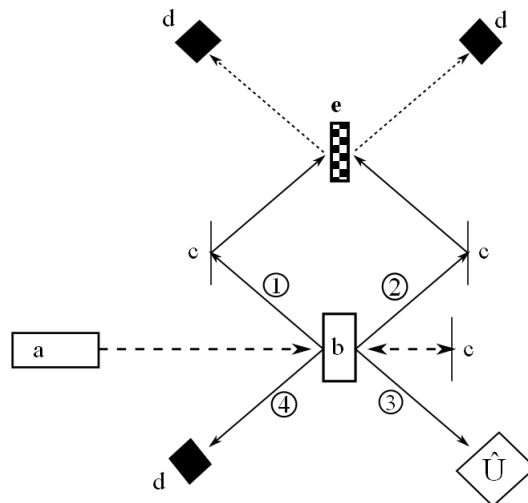


Abbildung 4: Vereinfachter schematischer Aufbau des Experiments von Zeilinger et al. nach [26]. Die wesentlichen Bestandteile sind: Ein gepulster UV-Laser (a), ein BBO-Kristall (b), Spiegel (c), Photodetektoren (d), ein 50-50-Strahlteiler (e) und Bauteile zur Durchführung einer unitären Transformation ( $\hat{U}$ ). Die Nummerierung der Photonen entspricht der in Abschnitt 4.1.

Während erste Experimente nur im Labor stattfanden, wurde im Laufe der Zeit die Entfernung zwischen Alice und Bob im Experiment immer weiter vergrößert. So überbrückten Zeilinger und sein Team mit Glasfaserkabeln unter der Donau eine Entfernung von 600 m. Mittlerweile gelang chinesischen Forschern bereits eine erfolgreiche Teleportation über eine Distanz von 97 km [27].

### 4.3 Die Bell-Messung

Obwohl die für die Teleportation benötigte Bell-Messung in ihrer mathematischen Beschreibung relativ einfach ist, stellt sie Physiker und Nichtphysiker vor einige Schwierigkeiten. So stellt sich die Frage, was die Bell-Messung genau ist und wie man sie erfolgreich realisieren kann.

Zunächst ist anzumerken, dass eine Bell-Messung nichts Mystisches oder Mysteriöses ist. Vereinfacht gesprochen kann man jede quantenphysikalische Messung an einem Quantenobjekt als eine Frage interpretieren. So entspricht beispielsweise die Messung des Ortes der Frage „*An welchem Ort befindet sich das Quantenobjekt zu diesem Zeitpunkt?*“. Mögliche Fragen sind aber auch „*Wie viel von Zustand A steckt in Zustand B?*“ oder „*Besitzt das Quantenobjekt die Eigenschaft C?*“.

Dasselbe kann gilt auch für eine Bell-Messung. Der Unterschied zu den eben genannten Fragen ist jedoch, dass sie sich nicht auf ein einzelnes Teilchen beziehen lässt, sondern nur auf ein System aus zwei oder mehr Teilchen. Die Frage lautet dann: „*In welchem Bell-Zustand befindet sich das System?*“

Diese Frage unterscheidet sich jedoch von den zuvor genannte in mehreren Punkten. Sie wird (bezogen auf ein Zweizustandssystem zweier Teilchen) mit einem der vier möglichen Zustände  $|\Psi^+\rangle, |\Psi^-\rangle, |\Phi^+\rangle, |\Phi^-\rangle$  beantwortet, d.h. es gibt keine exakte Information über den Zustand eines der beiden Teilchen. Ferner kann man zum einen die maximal verschränkten Bell-Zustände, genauso wie alle anderen Zustände, nicht mit bloßen Augen wahrnehmen, und zum anderen ist die Verschränkung selbst natürlich schwer vorstellbar. Auf Grund dieser Besonderheiten wird bereits offensichtlich, dass eine Bell-Messung sich nicht in einfacher Weise realisieren lässt.

In der ersten experimentellen Realisierung der Quantenteleportation war es noch nicht

möglich, eine vollständige Bell-Messung für unabhängige Photonen zu realisieren. Zeilinger et al. suchten daher nach einer Möglichkeit, eine Bell-Messung wenigstens teilweise zu realisieren. Mit ihrer auf einem halbdurchlässigen Strahlteiler basierenden Lösung, konnten sie zwar keine vollständige Bell-Messung durchführen, jedoch war es ihnen möglich, zwei der vier Bell-Zustände eindeutig identifizieren.

Die Detektion von  $|\Psi^-\rangle$ , auf welche sich Zeilingers Team bei der experimentellen Umsetzung einschränkte, lässt sich dabei am einfachsten realisieren. Der Grund hierfür liegt in der quantenmechanischen Betrachtung des Strahlteilers.

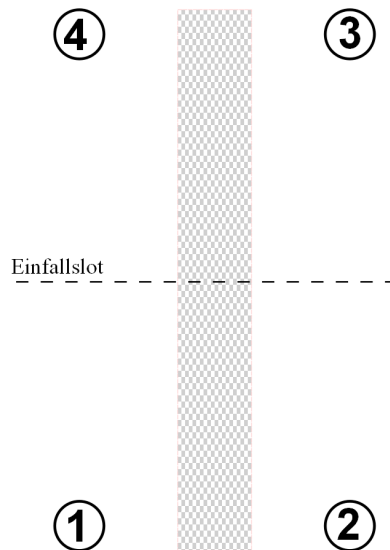


Abbildung 5: Veranschaulichung eines Strahlteilers, wie er im Folgenden verwendet wird.

Für die folgende Betrachtung sei vereinbart, dass Photonen an den Stellen 1 und 2 in den 50:50-Strahlteiler einlaufen können und bei 3 bzw. 4 den Strahlteiler wieder verlassen. Ferner seien die Lichtwege so justiert, dass ein Photon, welches bei 1 den Strahlteiler erreicht und transmittiert wird, sich bei 3 mit einem von 2 kommenden und am Strahlteiler reflektierten Photon überlagert.

Auch benötigt man zunächst keine genaue Angaben über den Zustand der Photonen. Es genügt lediglich zu wissen, wo ein Photon den Strahlteiler betritt, und wo es ihn wieder

verlässt. Daher gilt im folgenden die verkürzende Notation:

$$|n\rangle_i, \quad (126)$$

wobei  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  für den Ort (vgl. Abbildung 5) und  $n$  für die Anzahl der Photonen an diesem Ort steht.

Trifft nun ein einzelnes Photon auf den Strahlteiler, so wird es mit der Wahrscheinlichkeit  $p_t = 0,5$  transmittiert und mit der Wahrscheinlichkeit  $p_r = 0,5$  reflektiert. Bei der Reflexion erfährt das Photon zudem einen Phasensprung von  $e^{i\pi} = i$ . Es gilt also

$$|1\rangle_1|0\rangle_2 \xrightarrow{\text{Strahlteiler}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_3|0\rangle_4 + i|0\rangle_3|1\rangle_4). \quad (127)$$

Durch Vertauschen von 3 und 4 erhält man hieraus die Beschreibung für den Fall, dass das Photon bei 2 in den Strahlteiler eintritt:

$$|0\rangle_1|1\rangle_2 \xrightarrow{\text{Strahlteiler}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_3|1\rangle_4 + i|1\rangle_3|0\rangle_4). \quad (128)$$

Treffen nun zwei ununterscheidbare Photonen zeitgleich, aber aus verschiedenen Richtungen auf den Strahlteiler, so interferieren sie. Es gilt:

$$\begin{aligned} |1\rangle_1|1\rangle_2 &\xrightarrow{\text{Strahlteiler}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_3|0\rangle_4 + i|0\rangle_3|1\rangle_4)(i|1\rangle_3|0\rangle_4 + |0\rangle_3|1\rangle_4) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(i|1\rangle_3|0\rangle_4|1\rangle_3|0\rangle_4 + |1\rangle_3|0\rangle_4|0\rangle_3|1\rangle_4 \\ &\quad - |0\rangle_3|1\rangle_4|1\rangle_3|0\rangle_4 + i|0\rangle_3|1\rangle_4|0\rangle_3|1\rangle_4) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(i|2\rangle_3|0\rangle_4 + |1\rangle_3|1\rangle_4 - |1\rangle_3|1\rangle_4 + i|0\rangle_3|2\rangle_4) \\ &= \frac{i}{\sqrt{2}}(|2\rangle_3|0\rangle_4 + |0\rangle_3|2\rangle_4) \end{aligned} \quad (130)$$

Das bedeutet, dass unabhängig von der Polarisation zwei ununterscheidbare Photonen den Strahlteiler immer gemeinsam auf einer der beiden Seiten verlassen. Würde man also in jedem der Ausgänge 3 bzw. 4 einen Detektor für Photonen platzieren, so würde immer nur einer der beiden ein Ereignis anzeigen, aber nie beide gleichzeitig. Dies nennt man den Hong-Ou-Mandel (HOM) Effekt.



Etwas anschaulicher lässt sich das Ergebnis unter Betrachtung der Wahrscheinlichkeitsamplituden für die einzelnen Fälle herleiten. Formal gesehen gibt es vier mögliche Ausgänge, von denen sich zwei jedoch nicht unterscheiden lassen.

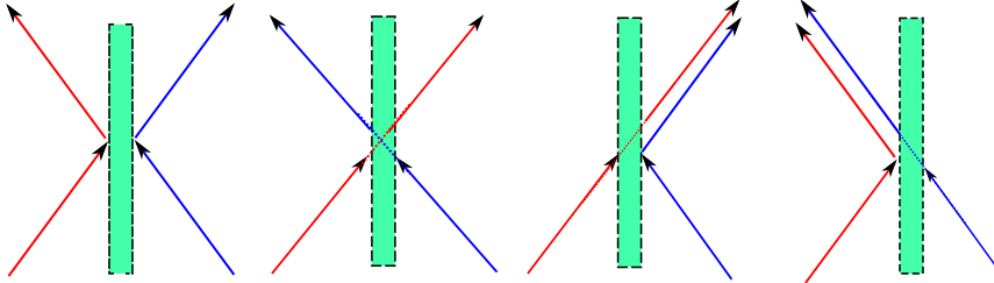


Abbildung 6: Die vier möglichen Ausgänge am Strahlteiler.

Dabei gilt für die Wahrscheinlichkeitsamplitude (vgl. Gleichung (127)) bei der Transmission  $A_T = \frac{1}{\sqrt{2}}$  und bei der Reflexion  $A_R = \frac{i}{\sqrt{2}}$ . Somit folgt:

$$\begin{aligned}
 P(\text{beide Photonen auf einer Seite}) &= P(\text{eines reflektiert und eines transmittiert}) \\
 &= |A_R A_T + A_T A_R|^2 = \left| \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{i}{\sqrt{2}} \right|^2 \quad (131) \\
 &= \left| \frac{2i}{2} \right|^2 = 1.
 \end{aligned}$$

Analog gilt hier:

$$\begin{aligned}
 P(\text{je ein Photon auf einer Seite}) &= P(\text{beide reflektiert oder beide transmittiert}) \\
 &= |A_R A_R + A_T A_T|^2 = \left| \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 \quad (132) \\
 &= \left| -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right|^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Aber wie konnten dann Zeilinger und sein Team anhand eines Strahlteilers einen Bell-Zustand mithilfe von Koinzidenzdetektion identifizieren, wenn es doch keine Koinzidenzen geben kann?

Die Antwort hierauf ist einfach, aber nicht offensichtlich: Die obige Beschreibung des

Strahlteilers gilt nur für Teilchen, welche eine symmetrische Wellenfunktion besitzen, nicht jedoch für Teilchen mit antisymmetrischen Wellenfunktionen.

Nun sind Photonen aber Bosonen, d.h. sie besitzen eine symmetrische Wellenfunktion, und für sie müsste die Beschreibung gelten. Hier muss man jedoch genauer auf die Wellenfunktion blicken. Diese setzt sich aus mehreren Teilen zusammen: Aus einem Teil für die räumliche Beschreibung und einem für die Beschreibung der inneren Freiheitsgrade (beispielsweise Spin oder Polarisation). Da beide voneinander unabhängig sind, kann die (Gesamt-)Wellenfunktion eines Photons daher als Produkt der beiden Wellenfunktionen geschrieben werden.

Eine symmetrische Gesamtwellenfunktion lässt sich daher auf zwei Arten realisieren. Zum einen können beide Faktoren symmetrisch sein, zum anderen können aber beide Faktoren antisymmetrisch sein. Da die Zustände  $|\Psi^+\rangle, |\Phi^\pm\rangle$  unter Vertauschung der beiden Photonen invariant sind, sind diese Anteile symmetrisch und die entsprechenden räumlichen Anteile müssen ebenfalls symmetrisch sein.

Der Zustand  $|\Psi^-\rangle$  ändert jedoch unter Vertauschung der beiden Photonen sein Vorzeichen, d.h. er ist antisymmetrisch. Befinden sich die beiden Photonen also bzgl. ihrer Polarisation in diesem Zustand, so muss zwangsläufig der räumliche Anteil der Gesamtwellenfunktion antisymmetrisch sein.

Der Strahlteiler selbst betrachtet nur den räumlichen Anteil. Für ihn ist die Polarisation irrelevant. Befinden sich also die Photonen hinsichtlich ihrer Polarisation in einem der Zustände  $|\Psi^+\rangle, |\Phi^\pm\rangle$ , so kann aufgrund des symmetrischen räumlichen Anteils der Gesamtwellenfunktion niemals eine Koinzidenz detektiert werden.

Befinden sich die Photonen hinsichtlich der Polarisation jedoch im Zustand  $|\Psi^-\rangle$ , so ist ihr räumlicher Anteil antisymmetrisch, und es muss daher die Beschreibung für Fermionen verwendet werden. Diese unterscheidet sich von der für Bosonen aus den Gleichungen (131) und (132) dadurch, dass das  $+$  durch ein  $-$  ausgetauscht werden muss<sup>17</sup>. Es gilt

---

<sup>17</sup>Die exakte Erklärung für den Austausch von  $+$  und  $-$  übersteigt den Rahmen der Darstellung in dieser Masterarbeit. Sie liegt jedoch in den unterschiedlichen Eigenschaften und damit der unterschiedlichen mathematischen (statistischen) Beschreibung von Bosonen und Fermionen.

dann:

$$P(\text{beide Photonen auf einer Seite}) = |A_R A_T - A_T A_R|^2 = \left| \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{i}{\sqrt{2}} \right|^2 = 0, \quad (133)$$

sowie analog

$$P(\text{je ein Photon auf einer Seite}) = |A_R A_R - A_T A_T|^2 = \left| \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = 1. \quad (134)$$

Folglich wird man zwei Fermionen oder in diesem Fall zwei Photonen, welche sich bzgl. ihrer Polarisierung im Zustand  $|\Psi^-\rangle$  befinden, hinter dem Strahlteiler niemals gemeinsam auf nur einer Seite finden. Es wird immer ein Photon auf der einen und das andere auf der anderen Seite detektiert werden können.

Der Zustand  $|\Psi^-\rangle$  bezüglich der Polarisierung kann also tatsächlich eindeutig mithilfe eines Strahlteilers identifiziert werden. Man muss nur in jedem der Ausgänge einen Detektor platzieren und auf Koinzidenzen achten.

Würde man den Aufbau noch leicht modifizieren, so könnte man auch noch den Zustand  $|\Psi^+\rangle$  eindeutig identifizieren. Dieser liefert zwar dasselbe Messergebnis, wie die Zustände  $|\Phi^\pm\rangle$ , jedoch sind die beiden Photonen im Zustand  $|\Psi^+\rangle$  verschieden polarisiert, wohingegen bei  $|\Phi^\pm\rangle$  beide Photonen immer dieselbe Polarisierung besitzen. Würde man also in jedem der beiden Ausgänge eine Polarisationsanalyse durchführen, so könnte man zusätzlich noch  $|\Psi^+\rangle$  von  $|\Phi^\pm\rangle$  unterscheiden.

Der Aufbau, mit welchem man zwei der vier Zustände eindeutig bestimmen kann, ist jedoch etwas komplexer. Er wird beispielsweise in [28] von Zeilinger und seinem Team beschrieben. Würde man diesen Aufbau anstatt des einfachen 50:50-Strahlteilers bei der Teleportation verwenden, so könnte man nicht nur in 25% aller Fälle, sondern immerhin in 50% der Fälle eine Teleportation durchführen. Dennoch reicht es noch nicht aus, um eine Teleportation unabhängig vom Ergebnis der Bell-Messung zu ermöglichen, da man hierfür in der Lage sein müsste, jeden der vier Bell-Zustände eindeutig messen zu können.

Mit den heutigen Mitteln kann zwar jeder der Bell-Zustände gemessen werden, jedoch sind diese Messverfahren probabilistisch und ihre Realisierungen sind wesentlich komplexer. Ein entsprechender Aufbau für eine solche Bell-Messung wird von Weinfurter et al. in [29] und White et al. in [30] beschrieben. Zwar kann mit diesem Aufbau jeder der

Bell-Zustände eindeutig bestimmt werden, da das Verfahren jedoch probabilistisch ist, ist die Bell-Messung nur in einem von neun Fällen erfolgreich. Eine Teleportation wäre daher nur in ca. 11% aller Fälle möglich. Hier liegt also einer der Bereiche, in welchem für die Zukunft noch Forschungsbedarf vorhanden ist.

## 4.4 Visualisierung der Quantenteleportation

In der bisherigen Darstellung der Quantenteleportation wurde viel Mathematik vorausgesetzt. Dies mag für manche abschreckend wirken, jedoch ist die verwendete Mathematik nicht kompliziert. Es ist daher zweckmäßig, eine Darstellung zu suchen, bei welcher die Mathematik nicht dominiert und daher nicht abschreckt.

Im Folgenden wird daher eine andere Darstellung der Quantenteleportation aufgezeigt. Die mathematische Beschreibung wird dabei stark vereinfacht und vor allem grafisch dargestellt. Veröffentlicht wurde die Idee von Scott M. Cohen im Jahr 2008. Interessierte Leser finden eine umfassendere Darstellung in [31].

Zunächst sei ein Photon betrachtet, welches sich im Zustand

$$|\phi\rangle = c_h|\leftrightarrow\rangle + c_t|\updownarrow\rangle \quad (135)$$

befindet. Diesen Zustand kann man einfach grafisch darstellen als

$$|\phi\rangle = \begin{array}{c} |\leftrightarrow\rangle \\ |\updownarrow\rangle \end{array} \begin{array}{c} \boxed{c_h} \\ \boxed{c_t} \end{array}. \quad (136)$$

Nun wird das System um ein zweites Photon erweitert. Dieses zweite Photon sei horizontal polarisiert. Dann gilt für das Gesamtsystem:

$$|\phi_{1, \leftrightarrow_2}\rangle = \begin{array}{c} |\leftrightarrow_1\rangle \\ |\updownarrow_1\rangle \end{array} \begin{array}{cc} |\leftrightarrow_2\rangle & |\updownarrow_2\rangle \\ \boxed{c_h} & \boxed{\phantom{c_h}} \\ \boxed{c_t} & \boxed{\phantom{c_t}} \end{array}, \quad (137)$$

wobei die Indizes hier verdeutlichen sollen, um welches Photon es sich jeweils handelt.

Für die Quantenteleportation benötigt man jedoch ein System, welches aus drei Pho-

tonen besteht. Hierfür müsste die grafische Darstellung um eine Dimension erweitert werden, d.h. es müsste ein Würfel anstatt der zweidimensionalen Matrix verwendet werden. Ein solcher Würfel lässt sich jedoch nur schwer darstellen, weshalb die folgende Erweiterung der zweidimensionalen Matrix praktischer ist. Dazu sei vorausgesetzt, dass das dritte Photon vertikal polarisiert ist.

$$|\phi_1, \leftrightarrow_2, \uparrow_3\rangle = \begin{array}{l} |\leftrightarrow_1, \leftrightarrow_2\rangle \\ |\uparrow_1, \leftrightarrow_2\rangle \\ |\leftrightarrow_1, \downarrow_2\rangle \\ |\uparrow_1, \downarrow_2\rangle \end{array} \begin{array}{c|c} |\leftrightarrow_3\rangle & |\downarrow_3\rangle \\ \hline & c_h \\ \hline & c_t \\ \hline & \\ \hline & \end{array}. \quad (138)$$

Ein analoges Bild ergibt sich, wenn die Photon 2 vertikal und Photon 3 horizontal polarisiert ist. Dann ist der Gesamtzustand gegeben durch

$$|\phi_1, \downarrow_2, \leftrightarrow_3\rangle = \begin{array}{l} |\leftrightarrow_1, \leftrightarrow_2\rangle \\ |\uparrow_1, \leftrightarrow_2\rangle \\ |\leftrightarrow_1, \downarrow_2\rangle \\ |\uparrow_1, \downarrow_2\rangle \end{array} \begin{array}{c|c} |\leftrightarrow_3\rangle & |\downarrow_3\rangle \\ \hline & \\ \hline c_h & \\ \hline c_t & \\ \hline & \end{array}. \quad (139)$$

Wenn sich nun, wie bei der Teleportation notwendig, die Photonen 3 und 4 in einem maximal verschränkten Zustand (hier<sup>18</sup> wieder  $|\Psi^-\rangle = |\leftrightarrow_2, \uparrow_3\rangle - |\downarrow_2, \leftrightarrow_3\rangle$ ) befinden, dann lässt sich die Darstellung aus (138) und (139) einfach durch Addition generieren. Sie hat dann die Form

$$|\phi_1\rangle(|\leftrightarrow_2, \uparrow_3\rangle - |\downarrow_2, \leftrightarrow_3\rangle) = \begin{array}{l} |\leftrightarrow_1, \leftrightarrow_2\rangle \\ |\uparrow_1, \leftrightarrow_2\rangle \\ |\leftrightarrow_1, \downarrow_2\rangle \\ |\uparrow_1, \downarrow_2\rangle \end{array} \begin{array}{c|c} |\leftrightarrow_3\rangle & |\downarrow_3\rangle \\ \hline & c_h \\ \hline & c_t \\ \hline & \\ \hline & \end{array} - \begin{array}{l} |\leftrightarrow_1, \leftrightarrow_2\rangle \\ |\uparrow_1, \leftrightarrow_2\rangle \\ |\leftrightarrow_1, \downarrow_2\rangle \\ |\uparrow_1, \downarrow_2\rangle \end{array} \begin{array}{c|c} |\leftrightarrow_3\rangle & |\downarrow_3\rangle \\ \hline & \\ \hline c_h & \\ \hline c_t & \\ \hline & \end{array} \quad (140)$$

$$= \begin{array}{l} |\leftrightarrow_1, \leftrightarrow_2\rangle \\ |\uparrow_1, \leftrightarrow_2\rangle \\ |\leftrightarrow_1, \downarrow_2\rangle \\ |\uparrow_1, \downarrow_2\rangle \end{array} \begin{array}{c|c} |\leftrightarrow_3\rangle & |\downarrow_3\rangle \\ \hline & c_h \\ \hline & c_t \\ \hline -c_h & \\ \hline -c_t & \\ \hline & \end{array}. \quad (141)$$

<sup>18</sup>Von der Normierung sei hier abgesehen.

Diese Darstellung ist etwas unhandlich. Jedoch kann sie auf Grund der Verschränkung der Photonen 2 und 3 sowie der Eigenschaften der Produktzustände leicht zu der kompakteren Darstellung

$$|\phi_1\rangle(|\leftrightarrow_2, \uparrow_3\rangle - |\downarrow_2, \leftrightarrow_3\rangle) = \begin{array}{c} |\leftrightarrow_2\rangle \\ |\downarrow_2\rangle \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline |\leftrightarrow_3\rangle & |\uparrow_3\rangle \\ \hline & \phi_1 \\ \hline -\phi_1 & \\ \hline \end{array} \quad (142)$$

vereinfacht werden. Zu beachten ist dabei jedoch, dass  $\phi_1$  hier für den Zustand aus Gleichung (135) steht.

Für die Teleportation muss nun an diesem Zustand eine Bell-Messung durchgeführt werden. Bevor allerdings die Bell-Messung grafisch dargestellt werden kann, ist es wichtig, zunächst einmal eine einfache Messung in der grafischen Darstellung zu realisieren. Angenommen, es soll gemessen werden, welche Polarisation das zweite Photon besitzt. In diesem Fall gibt es zwei mögliche Ausgänge, nämlich horizontal oder vertikal. Im Folgenden sei angenommen, dass das Ergebnis der Messung „horizontal“ wäre, der Fall, in dem das Ergebnis „vertikal“ lautet, ist dazu analog. Es gilt:

$$\hat{P}_{|\leftrightarrow_2\rangle}|\phi_1, \leftrightarrow_2, \leftrightarrow_3\rangle := \langle \leftrightarrow_2 | \times \begin{array}{c} |\leftrightarrow_2\rangle \\ |\downarrow_2\rangle \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline |\leftrightarrow_3\rangle & |\uparrow_3\rangle \\ \hline & \phi_1 \\ \hline -\phi_1 & \\ \hline \end{array} \quad (143)$$

$$= \begin{array}{|c|c|} \hline |\leftrightarrow_3\rangle & |\uparrow_3\rangle \\ \hline & \phi_1 \\ \hline \end{array} \quad (144)$$

$$= |\phi_1\rangle|\uparrow_3\rangle. \quad (145)$$

Die Messung, welche zum Kollaps der Wellenfunktion führt, manifestiert sich also in der grafischen Darstellung in Form der Löschung aller Zeilen, in welchen der gemessene Zustand (hier:  $|\leftrightarrow_2\rangle$ ) nicht vorkommt. In diesem konkreten Fall wurde eine einzige Zeile gelöscht. Dies liegt jedoch daran, dass hier die verkürzte Darstellung verwendet wurde. In der Darstellung von Gleichung (141) entspricht dies einer Löschung von zwei Zeilen.

Bei einer Bell-Messung wird das Ergebnis der Messung eine Superposition zweier Pro-

duktzustände sein, d.h. für die Messung muss ein Zustand der Form  $|\alpha_1, \beta_2\rangle + |\gamma_1, \delta_2\rangle$  gemessen werden. Eine solche Messung lässt sich nicht in der verkürzten Form der Visualisierung darstellen. Daher wird im Folgenden ausschließlich die längere Darstellung verwendet.

Angenommen, Alice stellt bei ihrer Bell-Messung fest, dass ihre Photonen sich im Zustand  $|\Psi^-\rangle = |\leftrightarrow_1, \uparrow_2\rangle - |\uparrow_1, \leftrightarrow_2\rangle$  befinden. Dann kollabiert die Wellenfunktion und man erhält in der grafischen Darstellung:

$$\begin{aligned}
 (\langle \leftrightarrow_1, \uparrow_2 | - \langle \uparrow_1, \leftrightarrow_2 |) \times & \begin{array}{c} | \leftrightarrow_3 \rangle \quad | \uparrow_3 \rangle \\ \hline | \leftrightarrow_1, \leftrightarrow_2 \rangle \quad \begin{array}{|c|} \hline c_h \\ \hline \end{array} \\ | \uparrow_1, \leftrightarrow_2 \rangle \quad \begin{array}{|c|} \hline c_t \\ \hline \end{array} \\ \hline | \leftrightarrow_1, \uparrow_2 \rangle \quad \begin{array}{|c|} \hline -c_h \\ \hline \end{array} \\ | \uparrow_1, \uparrow_2 \rangle \quad \begin{array}{|c|} \hline -c_t \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} | \leftrightarrow_3 \rangle \quad | \uparrow_3 \rangle \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline -c_h \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} | \leftrightarrow_3 \rangle \quad | \uparrow_3 \rangle \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline c_t \\ \hline \end{array} \end{array} \\ \\ = \begin{array}{c} | \leftrightarrow_3 \rangle \quad | \uparrow_3 \rangle \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline -c_h \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline -c_t \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (146)
 \end{aligned}$$

$$= -c_h |\leftrightarrow_3\rangle - c_t |\uparrow_3\rangle \equiv -|\phi\rangle. \quad (147)$$

Diese Darstellung lässt sich natürlich auch für jeden anderen in Kapitel 4.1 genannten Ausgang der Bell-Messung bzw. für Verwendung eines verschränkten Paares, welches nicht im Zustand  $|\Psi^-\rangle$  befindet, verwenden. Allerdings kann die unitäre Transformation, welche notwendig ist, wenn sich Bobs Photon nach der Bell-Messung nicht im Zustand  $-|\phi\rangle$  befindet, nicht in dieser grafischen Realisierung dargestellt werden.

Jedoch entspricht eine unitäre Transformation einer Drehung des Koordinatensystems, sodass diese, nach der Transformation in die Dirac-Schreibweise, mit relativ wenig mathematischem Aufwand durch eine Matrix (oder Abbildungsvorschrift) realisiert werden kann.

## 4.5 Probleme und Anwendungen

Im Zusammenhang mit der experimentellen Realisierung der Quantenteleportation traten verschiedene Probleme auf, welche für eine sinnvolle Anwendung der Teleportation in der nahen oder fernen Zukunft behoben werden müssen. Diese Probleme sind unter anderem:

- Die experimentelle Realisierung der Bell-Messung.
- Die Dekohärenz beim verschränkten Photonenpaar durch Wechselwirkung mit der Umgebung oder Verunreinigungen im Lichtleiter.
- Die fehlende Speichermöglichkeiten für verschränkte Photonen.
- ...

Das Problem der Bell-Messung und die zugehörige Lösung wurden bereits in Kapitel 4.3 behandelt. Im Folgenden werden Lösungen für die Probleme der Dekohärenz und der Speicherung vorgestellt.

### 4.5.1 Dekohärenz und Destillation

In unserem Alltag nehmen wir die Quantenphänomene nicht wahr. So kann man beispielsweise gleichzeitig den Ort und die Geschwindigkeit eines vorbeifahrenden Autos exakt bestimmen. Dabei besteht sowohl das Auto, als auch der Beobachter selbst aus Quantenobjekten, für welche die Unschärferelation gilt.

Auch wird keine Superposition von Zuständen bei makroskopischen Objekten, d.h. in der Alltagswelt, beobachtet. Diesen Verlust der Superposition oder, genauer gesagt, die Tatsache, dass wir im Alltag keine Superposition und die damit verbunden Phänomene wie die Interferenz beobachten können, wird durch die Dekohärenz erklärt.

Die Dekohärenz bewirkt bei verschränkten Teilchen, dass der Grad der Verschränkung geringer wird. Für die Quantenteleportation stellt das ein Problem dar, denn es werden die maximal verschränkten Zustände  $|\Psi^\pm\rangle, |\Phi^\pm\rangle$  für eine erfolgreiche Teleportation benötigt. Um zu gewährleisten, dass das Photonenpaar wirklich maximal verschränkt ist, müsste das verschränkte Photonenpaar in der experimentellen Realisierung von der Umwelt komplett isoliert werden. Dies ist jedoch nicht möglich.

Es wäre daher schön, wenn man<sup>19</sup> mit einfachen, lokalen experimentellen Mitteln den Grad der Verschränkung zweier Teilchen erhöhen könnte. So einfach ist dies natürlich

---

<sup>19</sup>Im Falle der Teleportation sind dies Alice und Bob, welche räumlich getrennt sind, und jeweils nur direkten Zugriff auf ein Teilchen des verschränkten Paares haben.



nicht, denn letzten Endes könnte die Formulierung „den Grad der Verschränkung erhöhen“ auch bedeuten, dass man aus zwei unverschränkten Teilchen ein Paar maximal verschränkter Teilchen erzeugen kann. Dies ist jedoch nicht möglich. Es gilt:

**Satz 4.2. *Fundamentalsatz der Quanteninformationsverarbeitung***

*Es ist nicht möglich, nur mit lokalen Operationen und klassischer Kommunikation einen unverschränkten Zustand in einen verschränkten zu verwandeln.*

Dieser Satz kann nicht mathematisch bewiesen werden. Man kann ihn jedoch aus physikalischer Sicht begründen. Eine kurze Darstellung dieser Begründung findet man in [14]. An dieser Stelle ist lediglich wichtig, dass es nicht möglich ist, aus einem komplett unverschränkten Zustand einen (maximal) verschränkten Zustand unter den bei der Teleportation gegebenen Voraussetzungen zu erzeugen. Aus einem Zustand, welcher jedoch einen gewissen kleinen Grad der Verschränkung besitzt, kann man den Verschränkungsgrad erhöhen.

Der Prozess, welcher dies ermöglicht, wird Destillation (engl. purification) genannt. Für die Destillation gibt es mehrere Verfahren, welche in unterschiedlichen Situationen angewendet werden. Hier wird nur kurz die Idee des Verfahrens aus [14] wiedergegeben.

Angenommen, Alice und Bob wollen einen Zustand teleportieren. Das maximal verschränkte Photonenpaar wird dazu zwischen ihnen aufgeteilt, wobei jedes der Photonen durch ein Glasfaserkabel läuft. Da Glasfaserkabel meist leichte Verunreinigungen aufweisen, wird der Grad der Verschränkung im Mittel mit der Zeit und damit mit der zurückgelegten Strecke abnehmen. Für die Teleportation ist das Paar daher nicht mehr geeignet. Verfügen Alice und Bob zusammen jedoch über zwei solcher, nach durchlaufen der Glasfaserkabel, nicht mehr maximal verschränkten Paare, so lässt sich ein maximal verschränktes Paar daraus erzeugen. Zunächst führt Alice an ihren Photonen eine Drehung des Koordinatensystems durch und erhält so

$$|\leftrightarrow\rangle \mapsto \frac{|\leftrightarrow\rangle - i|\updownarrow\rangle}{\sqrt{2}} \tag{148}$$

$$|\updownarrow\rangle \mapsto \frac{|\updownarrow\rangle - i|\leftrightarrow\rangle}{\sqrt{2}} \tag{149}$$

Bob muss nun an seinen Photonen die inverse Operation durchführen. Im Anschluss führen Alice und Bob eine controlled NOT (kurz: CNOT) Operation an ihren zwei Teilchen durch.

Diese Operation wird durch die Vorschrift

$$|\leftrightarrow\rangle|\leftrightarrow\rangle \mapsto |\leftrightarrow\rangle|\leftrightarrow\rangle \quad (150)$$

$$|\leftrightarrow\rangle|\updownarrow\rangle \mapsto |\leftrightarrow\rangle|\updownarrow\rangle \quad (151)$$

$$|\updownarrow\rangle|\leftrightarrow\rangle \mapsto |\updownarrow\rangle|\updownarrow\rangle \quad (152)$$

$$|\updownarrow\rangle|\updownarrow\rangle \mapsto |\updownarrow\rangle|\leftrightarrow\rangle \quad (153)$$

beschrieben. Durch sie wird die Polarisation des zweiten Photons genau dann gedreht, wenn das erste Photon vertikal polarisiert ist. In allen anderen Fällen bleiben beide Photonen unverändert.

Zum Abschluss müssen Alice und Bob noch überprüfen, ob sie durch ihre Operationen wirklich die Verschränkung des einen Paares erhöht haben. Dazu führen Alice und Bob jeweils an ihren Teilchen des zweiten Photonenpaares (welches ja ggf. in der CNOT-Operation verändert wurde) eine Messung durch und tauschen sich über ihr Ergebnis aus. Wenn ihre Messergebnisse übereinstimmen, behalten sie das erste Paar und können mit ihm die Teleportation realisieren. Das zweite Paar, welches am Ende zur Kontrolle diente, kann durch die vorgenommene Messung natürlich nicht mehr für die Teleportation verwendet werden und wurde somit geopfert.

Sind Alices und Bobs Messergebnisse unterschiedlich, so haben ihre Operationen nicht die gewünschte Wirkung erzielt und beide Paare sind für die Teleportation unbrauchbar. Für weitere Details zu diesem Destillationsverfahren sei hier neben [14] auch auf [32, 33, 34] verwiesen.

### 4.5.2 Speicherung

Die Quantenteleportation dient dem Austausch von Informationen zwischen zwei (womöglich weit entfernten) Orten bzw. Gesprächspartnern. Um sie durchzuführen, benötigt man ein Paar maximal verschränkter Teilchen, welches zwischen den beiden Orten bzw. Gesprächspartnern aufgeteilt werden muss. Schön wäre es also, wenn man bei einem Treffen die verschränkten Paare erzeugen, aufteilen und speichern könnte, so dass die Paare nicht erst zu dem Zeitpunkt erzeugt und zwischen Alice und Bob aufgeteilt werden müssen, wenn sie miteinander kommunizieren möchten. Das daraus resultierende Problem ist die Tatsache, dass es möglich sein muss, die Verschränkung zwischen den Teilchen bis zu ihrer Verwendung aufrecht zu erhalten.

Würde man nun Photonen verwenden, so wäre es zwar möglich große Strecken in relativ kurzer Zeit zu überbrücken, d.h. die Teilchen könnten schnell voneinander getrennt werden, jedoch bereitet hier die Speicherung ohne Verluste hinsichtlich der Verschränkung große Schwierigkeiten.

Natürlich könnte man Atome bzw. Ionen verwenden. Diese lassen sich zwar relativ gut in Laserfallen speichern, jedoch können mit ihnen keine großen Distanzen überwunden werden.

Eine mögliche Lösung des Problems bietet die Kombination von Ionen und Photonen, wie sie in [35, 36] vorgeschlagen wird. Zunächst würde ein Paar verschränkter Photonen erzeugt, mit welchem relativ große Abstände zwischen Alice und Bob realisiert werden könnten. Alice und Bob müssten dann jeweils ein Speichersystem, welches aus Ionen oder Atomen besteht, bereithalten. Fällt nun Alices Photon auf ihre Speichereinheit, so regt dieses ein Atom/Ion in einen, vom Zustand des Photons abhängigen, Zustand an. Analoges gilt für Bobs Photon und Speichereinheit. Folglich sind danach beide Speichereinheiten miteinander verschränkt.

Damit die Speicherung auch wirklich gelingt, sollten die angeregten Zustände entsprechend langlebig sein. Dies ist jedoch im allgemeinen nicht der Fall, sodass noch weitere Maßnahmen notwendig sein können, um eine Speicherung zu ermöglichen. Der gesamte Vorgang zur Speicherung kann am besten anhand der (Energie-)Zustände des Atoms beschrieben werden.

Der Grundzustand des Atoms in der Speichereinheit sei  $A$ . Durch das eintreffende Photon des verschränkten Paares wird das Atom in einen der Zustände  $B_i$  angeregt. Welcher der  $B_i$  angeregt wird, hängt dabei von den Eigenschaften des einfallenden Photons ab. Nun sind in der Regel auch Übergänge von  $B_i$  nach  $A$  erlaubt, weshalb die Speicherung in den Zuständen  $B_i$  nicht lange möglich ist. Daher sollten nun noch mit einem Laser Übergänge  $B_i \rightarrow C_i$  induziert werden, wobei von den Zuständen  $C_i$  keine Übergänge nach  $A$  erlaubt sein sollen. Dadurch sind die  $C_i$  über einen etwas längeren Zeitraum<sup>20</sup> stabil, und das verschränkte Photonenpaar kann entsprechend lange gespeichert werden.

---

<sup>20</sup>Die meisten angeregten Zustände besitzen eine Lebensdauer von einigen Nanosekunden. Die Zustände  $C_i$  müssen daher eine deutlich größere Lebensdauer besitzen, welche jedoch für Menschen immer noch kurz erscheinen mag.

Zwar wird damit eine Speicherung des verschränkten Photonenpaares möglich, jedoch bleibt der Zeitraum, für den die Speicherung möglich ist, durch die endliche Lebensdauer der metastabilen Zustände  $C_i$  begrenzt. Eine Speicherung über Tage, Wochen oder gar Monate ist daher nicht möglich.

Für eine Anwendung der Quantenteleportation sollte folglich jederzeit die Möglichkeit bestehen, verschränkte Photonenpaare zu erzeugen und zwischen Sender und Empfänger aufzuteilen.

### 4.5.3 Anwendungen

Als Anwendungsgebiete für die Quantenteleportation lassen sich prinzipiell alle Bereiche der Kommunikation vorstellen, da durch die Teleportation Information übertragen werden kann. Jedoch ist der zur Realisierung benötigte Aufwand, insbesondere, wenn man die oben aufgelisteten Probleme und ihre Lösungen berücksichtigt, so groß, dass sich der Einsatz der Quantenteleportation zur Kommunikation in den meisten Fällen nicht lohnt.

Allerdings gibt es zwei Bereiche, in denen in naher Zukunft ein Einsatz sinnvoll ist. Zum einen wäre da die Quantenkryptographie und zum anderen der Quantencomputer.

Ein Quantencomputer ist, wie der Name schon sagt, zunächst einmal ein Computer. Der größte Unterschied zwischen einem Computer und einem Quantencomputer ist, abgesehen vom Aufbau, die Tatsache, dass ein Computer mit Quantenbits oder kurz Q-Bits arbeitet. Ein solches Q-Bit kann durch ein Photon oder Ion realisiert werden, wobei die Werte für 0 und 1 durch orthogonale Basiszustände einer charakteristischen Eigenschaft repräsentiert werden, z.B. die Polarisation ( $|\leftrightarrow\rangle, |\updownarrow\rangle$ ) im Falle von Photonen oder der Spin ( $|\up\rangle, |\down\rangle$ ) im Falle von Ionen. Im Gegensatz zum heutigen „klassischen“ Computer kann ein solches Q-Bit jedoch nicht nur den Wert 0 oder 1 annehmen, sondern auch jede mögliche Superposition der Form

$$|\nu\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle, \tag{154}$$

wobei  $c_0, c_1 \in \mathbb{C}$  die Bedingung  $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$  erfüllen. Hierdurch kann ein Quantencomputer mit den Werten 0 und 1 parallel rechnen und folglich wird die benötigte Zeit für das Ausführen von Rechenoperationen im Vergleich zu den heutigen Computern deutlich verringert (vgl. [37], S. 198 ff.).

Ferner lassen sich mithilfe von Quantenalgorithmien, d.h. mit speziell für den Quantencomputer konzipierten Rechenverfahren, gewisse mathematische Probleme effizienter lösen als mit heutigen Mitteln. Als Beispiel sei hier die Faktorisierung einer großen Zahl in ihre Primfaktoren genannt. Diese Aufgabe kann zwar heute schon gelöst werden, jedoch steigt bei den momentan verwendeten Algorithmen die benötigte Rechenzeit exponentiell mit der Größe der zu faktorisierenden Zahl. Für den Quantencomputer entwickelte Peter Shor 1994 einen Algorithmus für den Quantencomputer, den Shor-Algorithmus, bei welchem die zum Lösen des Faktorisierungsproblems benötigte Zeit nur polynomial mit der Länge der zu faktorisierenden Zahl wächst [32].

Für einige Anwendungen wird es jedoch von Nöten sein, dass mehrere Quantencomputer zusammen in einem Netzwerk rechnen. Dazu müssen sie miteinander kommunizieren und verschränkte Teilchen austauschen können. Letzteres könnte beispielsweise durch das sogenannte *entanglement swapping*, ein besonderer Fall der Quantenteleportation, welcher von Zeilinger et al. in ihren ersten Experimenten bereits realisiert wurde (vgl. Kapitel 4.2), erfolgen.

Die Darstellung des Quantencomputers und der Quantenalgorithmien wurde hier bewusst kurz gehalten, da ein Überblick über dieses Themengebiet selbst den Umfang einer Masterarbeit besitzen würde. Eine kurze, aber dennoch ausführlichere Darstellung des Shor-Algorithmus sowie Informationen zum Aufbau eines Quantencomputers findet man beispielsweise in [32].

Das zweite Gebiet, auf welchem die Quantenteleportation angewendet werden kann, ist das der Quantenkryptographie. Diese neue Art der Kryptographie wird notwendig, sobald der Quantencomputer realisiert werden kann, da heutige Verschlüsselungsalgorithmen auf der Tatsache basieren, dass gewisse mathematische Probleme nur mit großem Aufwand lösbar sind. Mithilfe des Shor-Algorithmus und anderer Quantenalgorithmien können viele dieser Probleme effektiv gelöst werden, sodass die heute verwendeten Verschlüsselungsverfahren keine Sicherheit mehr bieten.

Zwar gibt bereits es ein Verfahren, dessen Sicherheit nicht auf einem schwer lösbaren mathematischen Problem basiert und dessen Sicherheit mathematisch bewiesen werden

kann<sup>21</sup>. Jedoch ist es für die heutige Anwendungen unbrauchbar, da für jede Nachricht ein Schlüssel, dessen Länge der Länge der Nachricht entspricht, benötigt wird, dieser Schlüssel jedoch nur ein einziges Mal verwendet werden darf und sowohl dem Sender als auch dem Empfänger der Nachricht bekannt sein muss.

Einen Ausweg bietet die Quantenkryptographie. Sie liefert verschiedene Protokolle, welche an Stelle der heute üblichen Verfahren treten können und das oben erwähnte Verfahren, dessen beweisbare Sicherheit nicht auf einem schwer lösbaeren mathematischen Problem basiert, effizient realisieren können. Einen Einblick in dieses große Gebiet liefert ebenfalls [32]. Von der Darstellung etwas umfangreicher und dadurch detaillierter ist [35], denn dort werden nicht nur die verschiedenen Protokolle, sondern auch verschiedene Angriffsmöglichkeiten auf diese Systeme behandelt.

Die unterschiedlichen Protokolle verwenden dabei unterschiedliche Aspekte der Quantenphysik. Im Falle der 2-Photonen-Protokolle werden verschränkte Teilchen (z.B. Photonen) benötigt. Durch die Quantenteleportation ließe sich dabei die überbrückbare Entfernung zwischen Sender und Empfänger der Nachricht<sup>22</sup> vergrößern. Dazu könnte ein System aus mehreren Teleporterstationen über größere Entfernungen verteilt werden.

Eine solche Teleporterstation besteht im Wesentlichen aus einem verschränkten Photonenpaar sowie die notwendigen Apparaturen, um eine Bell-Messung sowie jede benötigte unitäre Transformation durchzuführen. Gelangt nun ein Photon in die Teleporterstation, so wird dort eine Bell-Messung an diesem und an einem Photon des verschränkten Paares durchgeführt. Dadurch befindet sich das andere Photon des verschränkten Paares in einem Zustand, aus welchem mittels einer unitären Transformation der Zustand des angekommenen Photons erzeugt wird. Sobald die unitäre Transformation durchgeführt wurde, wird das Photon aus der Teleporterstation emittiert und gelangt dann entweder an eine andere Teleporterstation oder zum Empfänger.

Mit dem Fortschreiten der Forschung auf dem Gebiet der Quanteninformation werden sich sicherlich noch mehr Anwendungsgebiete für die Quantenteleportation ergeben. Allerdings wird es wohl noch relativ lange dauern, bis die Quantenteleportation im Alltag eingesetzt werden kann.

---

<sup>21</sup>Dieses Verfahren ist das One-Time-Pad von Vernam. Eine detailliertere Darstellung, sowie den Beweis der Sicherheit findet man in [38]. Dort werden auch die heute üblichen Verfahren behandelt, welche durch einen Quantencomputer ihre Sicherheit verlieren.

<sup>22</sup>In diesem Fall der Schlüssel in dem speziellen Verfahren, mit welchem eine auf klassischem Wege übermittelte Nachricht verschlüsselt wurde.

## 5 Quantenteleportation in der Schule

Immer wieder wird festgestellt, dass das Unterrichtsfach Physik in Deutschland zu den unbeliebtesten Fächern zählt. Einige Ursachen hierfür sind bekannt [39], jedoch herrscht Uneinigkeit darüber, wie die Beliebtheit des Fachs Physik gesteigert werden kann. Insbesondere wird eine stärkere Kontextorientierung [40, 41] und mehr Anwendungsbezug gefordert. Bei den Themengebieten der klassischen Physik ist dies ohne Probleme möglich, problematisch wird es jedoch bei der Quantenphysik. Hier können diese Forderungen nur durch die Behandlung von Phänomenen und deren Anwendungen erfüllt werden, was sich jedoch meist als schwierig erweist.

Im Bereich der Quantenphysik könnte die Quantenteleportation zur Erfüllung der Forderung nach mehr Anwendungsbezug beitragen. Schließlich ist die Quantenteleportation zusammen mit der Quanteninformationstheorie immer noch ein aktuelles Forschungsgebiet und könnte in Zukunft einige Anwendungen hervorbringen, welche auch im Alltag nutzbar wären (siehe Kapitel 4.5). Hinzu kommt, dass die Quantenteleportation eine Möglichkeit bietet, die Nichtlokalität und den Indeterminismus der Quantenphysik anhand einer Anwendung zu zeigen. Insbesondere stellt die Quantenteleportation eine Anwendung für verschränkte Teilchen dar, welche in der Quantenphysik eine große Bedeutung besitzen.

Neben diesen Aspekten sollte auch eine möglicherweise positive Auswirkung auf die Motivation der Schüler bedacht werden.

Es stellt sich jedoch auf Grund der benötigten, umfangreichen theoretischen und mathematischen Grundlagen (Kapitel 2-4) die Frage, ob die Quantenteleportation überhaupt für die Schule geeignet ist, bzw. unter welchen Voraussetzungen sie im Schulunterricht eingesetzt werden kann. Dieses Kapitel wird sich damit ausführlich befassen.

### 5.1 Der Lehrplan

Eine Grundvoraussetzung dafür, dass ein Thema im Schulunterricht sinnvoll behandelt werden kann, ist ausreichend Zeit zur Behandlung des Themas bzw. das Vorkommen des Themengebietes im Lehrplan.

Ein Blick in den Lehrplan des Landes Rheinland-Pfalz zeigt, dass die Quantenphysik

für die Sekundarstufe I (Klassenstufen 7-10) nicht vorgesehen ist [42]. Erst im Lehrplan für die Oberstufe [43], wird die Quantenphysik explizit erwähnt.

Im Leistungskurs sind in der Qualifikationsphase, d.h. ab dem 2. Halbjahr der 11. Klasse die Bausteine „*Wellenoptik I*“, „*Mikroobjekte I*“ und „*Mikroobjekte III*“ Pflicht. In ihnen werden neben dem Doppelspaltversuch für das Licht auch die Polarisation des Lichtes, das Verhalten von Quantenteilchen am Doppelspalt, die Heisenbergsche Unschärferelation, Wahrscheinlichkeitswellen und der Fotoeffekt behandelt. Ferner gibt es die Wahlpflichtbausteine „*Wellenoptik II*“ mit einer Vertiefung der Interferenz von Licht und „*Interpretation der Quantenphysik*“, in welchem unter anderem die Themen Realität, Messprozess, Indeterminismus anhand von experimentellen Befunden behandelt werden sollten. Der Zeiteinsatz für alle hier genannten Bausteine liegt bei 10 Unterrichtsstunden.

Auch für den Grundkurs gibt es entsprechende Module, welche jedoch zum Teil andere Namen tragen und anders zusammengestellt sind. Dabei ist zu beachten, dass auf Grund der geringeren Unterrichtszeit<sup>23</sup> der Schwerpunkt für einen Grundkurs eher auf einer exemplarischen Behandlung mit Bezug zur Anwendung und der Lebenswelt der Schüler liegt.

Es ist daher aus Sicht des Lehrplans durchaus möglich die Quantenteleportation im Physikunterricht der Oberstufe zu behandeln. Angemerkt sei jedoch, dass sich die Lehrpläne der einzelnen Bundesländer nach wie vor unterscheiden. So ist in Bayern beispielsweise in der 10. Klasse ein Einblick in die Grundlagen der Quantenphysik vorgesehen, welcher dann in der 12. Klasse vertieft werden soll [44]. In diesem Zusammenhang können fachliche Inhalte des Physikunterrichts von Bundesland zu Bundesland variieren. Dieses Kapitel stützt sich daher ausschließlich auf den Lehrplan des Landes Rheinland-Pfalz und dessen Inhalte.

## 5.2 Schwierigkeiten und Lösungsvorschläge

Zu Beginn dieses Kapitels wurde auf Chancen und Schwierigkeiten bei der Behandlung der Quantenteleportation im Schulunterricht hingewiesen. Um im Unterricht die Quantenteleportation behandeln zu können, sollten nach Möglichkeit alle Schwierigkeiten bedacht und, wenn möglich, geeignete Lösungsansätze angeboten werden.

---

<sup>23</sup>In einem Leistungskurs soll der Unterricht in der Regel 5 Schulstunden pro Woche umfassen, wohingegen für einen Grundkurs nur 3 Schulstunden vorgesehen sind.



Im Rahmen einer Unterrichtseinheit zur Quantenteleportation ist mit verschiedensten Schwierigkeiten und Problemen zu rechnen. Aus meiner Sicht sind insbesondere folgende Probleme und Schwierigkeiten zu erwarten:

- Die benötigte umfangreiche mathematische und physikalische Theorie.
- Die Dirac-Schreibweise.
- Fehlende mathematische Kenntnisse.
- Die Verschränkung.
- Die Bell-Messung.
- Die unitären Transformationen.
- Das Verständnis der experimentellen Realisierungen.
- Fehlende Experimente für den Schulunterricht.
- Fehlendes Unterrichtsmaterial.

Natürlich hängen die Schwierigkeiten immer auch vom jeweiligen Physikkurs ab, weshalb die Liste sicherlich nicht vollständig ist und nicht alle der aufgelisteten Schwierigkeiten wirklich zum Problem werden können. Jedoch zeigt die Liste, dass eine entsprechende Unterrichtseinheit mangels durchführbarer Experimente sehr theorie- und mathematiklastig sein dürfte. Insbesondere in einem Grundkurs stellt dies auf Grund der Konzeption des Lehrplans und der zur Verfügung stehenden Zeit eine unüberwindliche Hürde dar. Eine Unterrichtseinheit zur Quantenteleportation kann daher meiner Meinung nach nur in einem Leistungskurs sinnvoll durchgeführt werden.

Jedoch stellen die aufgelisteten Schwierigkeiten auch für einen Leistungskurs eine große Hürde dar, weshalb eine gute didaktische Reduktion in Verbindung mit passenden Lösungen für die aufgelisteten Probleme unerlässlich ist.

### 5.2.1 Mathematische Grundlagen

Nicht jeder Schüler eines Leistungskurses in Physik belegt in der Oberstufe auch einen Leistungskurs in Mathematik. Zwar muss jeder Schüler in der Oberstufe mindestens Mathematik als Grundfach belegen, jedoch unterscheidet sich das Leistungsvermögen von

Grund- und Leistungskursschülern deutlich. In der Regel gibt es sogar Leistungsunterschiede zwischen den einzelnen Leistungskursen in Mathematik an ein und demselben Gymnasium.

Aber unabhängig davon gibt es einen großen Unterschied zwischen der Mathematik in der Schule und den benötigten mathematischen Grundlagen: Die Schulmathematik beschäftigt sich meist ausschließlich mit Problemen über  $\mathbb{R}$ , wohingegen die mathematische Beschreibung der Quantenphysik, wie sie in Kapitel 2 vorgenommen wurde, die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  benötigt. Hinzu kommt, dass die Begriffe Vektorraum, lineare Unabhängigkeit und Basis zwar durchaus im Mathematikunterricht der Oberstufe behandelt werden, jedoch spielt die Basis nach ihrer Einführung keine große Rolle im weiteren Unterrichtsverlauf, sodass davon auszugehen ist, dass die Schüler nicht zwangsläufig mit dem Konzept der Basis vertraut sind.

Auf den ersten Blick scheint das Vorhaben, die Quantenteleportation im Unterricht eines Physikleistungskurses zu behandeln, damit unmöglich zu sein. Aber benötigt man wirklich diese mathematischen Konstrukte und Begriffe um die Quantenteleportation zu erklären und sie zu verstehen? Die Antwort lautet: Nein.

Schaut man sich Bennets Protokoll (siehe Kapitel 4.1) genauer an, so stellt man fest, dass die Begriffe Hilbert-Raum, Vektorraum, Dualraum, Tensor und Skalarprodukt eigentlich gar nicht auftauchen<sup>24</sup>. Lediglich der Begriff des Vektors und Basis ist von Bedeutung. Dabei wird für Vektoren die Dirac-Schreibweise verwendet und der Vektor als Zustand des Systems bezeichnet.

Auch wenn die Dirac-Schreibweise für die Schüler zunächst unbekannt ist, so sollte sie keine allzu große Schwierigkeit darstellen. Schließlich kann die Schreibweise

$$|\Psi\rangle = |\uparrow, \downarrow, \downarrow\rangle = |\uparrow\rangle|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle \quad (155)$$

als zur Vereinfachung verwendete, verkürzte Notation der relevanten Merkmale des Zustandes bzw. der Photonen interpretiert und eingeführt werden. Bei der Einführung und

---

<sup>24</sup>Man kann einwenden, dass der Begriff des Tensors auch in Bennetts Protokoll vorkommt, da die Zustände des Zwei- bzw. Dreiteilchensystems ja streng gesehen Tensoren sind. Jedoch wird ein solches System ja durch einen Hilbert-Raum beschrieben, dessen Elemente Vektoren sind, weshalb man auf den Begriff des Tensors verzichten kann.

im folgenden Unterricht können zur Verdeutlichung der Zugehörigkeit des Symbols zu dem jeweiligen Teilchen auch Indizes verwendet werden.

In diesem Zusammenhang kann das Tensorprodukt, welches in der obigen Schreibweise nicht mit  $\otimes$  hervorgehoben wird, als Multiplikation interpretiert werden, da diese im Prinzip zu den selben Ergebnissen führt.

Problematisch ist der Begriff der Basis und die für das Verständnis der Bell-Messung notwendige Basistransformation. Letztere ist für Schüler nicht so leicht nachzuvollziehen, da die dafür notwendigen Rechnungen relativ umfangreich sind (siehe Anhang B.2). Da die Basistransformation unvermeidlich ist, in der Schule jedoch nicht durchgeführt werden kann, plädiere ich dafür, dass den Schülern das Ergebnis, d.h. Gleichung (122) vorgegeben und anschließend durch Ausmultiplizieren die Korrektheit des Ergebnisses überprüft wird.

In diesem Zusammenhang kann man einwenden, dass eigentlich Kenntnisse über die Komplexen Zahlen benötigt werden, da die Koeffizienten bei einer Superposition von Zuständen ja im Allgemeinen komplexwertig sind und beim Ausmultiplizieren ja auch die jeweiligen Koeffizienten miteinander multipliziert werden müssen. Da den Schülern die Komplexen Zahlen in der Regel unbekannt sind, könnte dies für die Schüler ein Problem darstellen. Jedoch werden für die Quantenteleportation nur Zustände verwendet, welche reellwertige Koeffizienten besitzen, sodass diese Schwierigkeit gar nicht auftreten kann.

Als letztes mathematisches Problem ist die notwendige unitäre Transformation von Bobs Zustand zu nennen. Die Schüler können sicherlich in der Zeigerdarstellung der Zustände erkennen, dass Bobs Zustand durch eine Drehung in den zu teleportierenden Zustand überführt werden kann. Jedoch gestaltet sich eine mathematische Behandlung als schwierig, da im Physikunterricht keine Matrizen behandelt werden und der Lehrplan für das Fach Mathematik Matrizen nur als Alternative im Wahlpflichtbereich der linearen Algebra beinhaltet. Man kann daher im Unterricht nicht erwarten, dass die Schüler Matrizen kennen bzw. mit ihnen rechnen können.

Da die mathematische Behandlung der unitären Transformation zudem keinen besonderen Erkenntnisgewinn mit sich bringt, kann man im Unterricht auf den mathematischen Formalismus verzichten und stattdessen eine rein phänomenologische Behandlung vornehmen. Je nachdem, wie das Leistungsniveau des Kurses ist, kann man auch die unitäre

Transformation komplett ausklammern, indem man sich auf die Fälle beschränkt, in denen der Zustand  $|\Psi^-\rangle$  bei der Bell-Messung detektiert wird.

Festzuhalten bleibt somit, dass mit einer geeigneten didaktischen Reduktion die Quantenteleportation aus Sicht der benötigten mathematischen Kenntnisse und Fertigkeiten im Unterricht behandelt werden könnte. Es bleiben jedoch noch die nichtmathematischen Probleme und Schwierigkeiten zu lösen.

### 5.2.2 Physikalische Grundlagen

Nachdem man mit einer geeigneten didaktischen Reduktion die mathematischen Schwierigkeiten beheben kann, stellt sich die Frage, ob vielleicht das benötigte physikalische Vorwissen eine Behandlung der Quantenteleportation im Schulunterricht unmöglich macht.

Von zentraler Bedeutung für die Quantenteleportation ist neben der Polarisation des Lichtes bzw. der Photonen auch die Verschränkung und der physikalische Messprozess, insbesondere die Bell-Messung und deren Auswirkung auf den Zustand eines Systems.

Damit ist bereits offensichtlich, dass die Quantenteleportation nicht zu Beginn des Themenkomplexes der Quantenphysik behandelt werden kann, da bereits Grundkenntnisse über die Besonderheiten der Quantenphysik notwendig sind.

In den Bausteinen, welche in Abschnitt 5.1 erwähnt wurden, werden explizit die Polarisation, der Doppelspalt, der Fotoeffekt sowie Wahrscheinlichkeitswellen und quantenmechanisches Verhalten von Photonen und Elektronen am Doppelspalt als Inhalte benannt. Das Wahlpflichtmodul „*Interpretation der Quantenphysik*“ beinhaltet sowohl naturphilosophische Probleme, wie beispielsweise den Indeterminismus und den Messprozess, als auch die Interpretation der quantenphysikalischen Beschreibung und experimenteller Befunde.

Insbesondere die Inhalte des Wahlpflichtbausteins lassen sich anhand des Doppelspaltbeschlusses behandeln und können daher mit den Inhalten der Pflichtbausteine kombiniert werden. Somit werden die meisten physikalischen Grundlagen explizit im Lehrplan erwähnt. Lediglich die Verschränkung steht (noch) nicht im Lehrplan.

Diese Tatsache ist verwunderlich, da verschränkte Teilchen ein fundamentaler Bestand-

teil der Quantenphysik sind und, wie in Kapitel 3 gezeigt wurde, für den Beweis der Korrektheit der Quantenphysik elementar wichtig sind. In [45] wird die Bedeutung der Verschränkung auf Seite 2 noch deutlicher herausgehoben und dadurch die Relevanz der Verschränkung für den Physikunterricht betont. Dort heißt es:

*„Der thematische Block zum Wellen- und Teilchencharakter von Licht gehört seit geraumer Zeit zum Schulunterricht. Noch nicht etabliert hat sich eine Auseinandersetzung mit der Nichtlokalität von verschränkten Photonen. Doch viele moderne Experimente mit verschränkten Photonen führen zu technologischen Anwendungen und werden in den kommenden Jahren die Forschungsabteilungen in Instituten und Unternehmen zunehmend beschäftigen. Daher ist eine Vermittlung quantenmechanischer Grundlagen anhand von verschränkten Photonen wichtig.“*

Es stellt sich also die Frage, warum die Nichtlokalität und Verschränkung nicht im Lehrplan erwähnt wird und sich noch nicht im Unterricht etablieren konnte. Eine mögliche Antwort darauf wäre die Feststellung, dass die Verschränkung für Schüler zu kompliziert und daher nur schwer verständlich ist.

Dieses Argument mag greifen, wenn man Verschränkung nur über die recht abstrakte Eigenschaft, dass ein verschränkter Zustand sich nicht als Produkt von Zuständen der einzelnen Teilchen schreiben lässt, definiert. Jedoch ist eine Definition über die Korrelation bzw. die (stochastische) Abhängigkeit der Zustände der einzelnen Teilchen für das Verständnis viel zweckmäßiger.

Bei einem Paar verschränkter Teilchen kann man aufgrund einer Messung an einem Teilchen das Ergebnis einer entsprechenden Messung am zweiten Teilchen präzise vorhersagen, vorausgesetzt die Messapparaturen sind identisch eingestellt<sup>25</sup>.

Nachdem der Rahmenlehrplan in Rheinland-Pfalz für das Fach Mathematik [46] bereits elementare Begrifflichkeiten aus dem Gebiet der Stochastik für die Sekundarstufe I vorsieht, sollte es keine allzu großen Schwierigkeiten bereiten den Begriff der stochastischen Unabhängigkeit einzuführen und darauf aufbauend die Verschränkung zu definieren.

---

<sup>25</sup>Etwas mathematischer formuliert bedeutet dies, dass die Messbasen für beide Messungen identisch sein müssen.

Als ein weitaus größeres Problem ist die Erzeugung von verschränkten Photonen sowie die Bell-Messung anzusehen. Dabei ist die Bell-Messung aus mathematischer Sicht relativ einfach. Mit dem Vorwissen über den physikalischen Messprozess, welches die Schüler aus dem Wahlpflichtmodul „*Interpretation der Quantenphysik*“ besitzen, lässt sich die Bell-Messung als Detektion des Bell-Zustandes, in welchem sich die Teilchen befinden, deuten<sup>26</sup> und ihre Auswirkungen auf den Zustand des Systems anhand der mathematischen Gleichung erkennen. Allerdings sind dann seitens der Schüler Fragen nach der Umsetzung einer solchen Messung zu erwarten, da sich eine Bell-Messung, von dem, was die Schüler als Messung kennen, stark unterscheidet.

Die Frage nach der Umsetzung der Bell-Messung stellt die eigentliche Schwierigkeit dar. In Kapitel 4.3 wurde diese Frage beantwortet, jedoch ist das dortige Niveau für Schüler zu hoch und die benötigten Vorkenntnisse zu umfangreich als dass sich die Frage für Schüler verständlich und zufriedenstellend beantworten lässt.

Ähnliches gilt für die Erzeugung von verschränkten Photonen. Hier liegt das Problem jedoch eher auf der Seite der Theorie, da die spontane parametrische Fluoreszenz nicht schülergerecht erklärt werden kann. Lediglich eine phänomenologische Beschreibung des Vorgangs ist möglich. Diese Beschreibung dürfte den meisten Schülern genügen, besonders leistungsstarke Schüler werden sicherlich weiterführende Fragen stellen.

An dieser Stelle kann das Unterrichtskonzept der Universität Erlangen [47] weiterhelfen. Die Abteilung für Didaktik der Physik beschäftigt sich dort mit der Quantenphysik und insbesondere der Quantenoptik im Schulunterricht und in der Lehrerausbildung. Dort findet man auch eine für Schüler verständliche Erklärung für die Erzeugung von verschränkten Photonen, welche die meisten Schülerfragen beantworten sollte. Ferner wird dort auch der Hong-Ou-Mandel-Effekt erklärt, welcher für die Bell-Messung, wie sie Zeilinger et al. in ihren Experimenten zur Teleportation durchführten, relevant ist.

Die Universität Erlangen hat mit ihrem Konzept bisher nur positive Erfahrungen gemacht, d.h. es scheint möglich zu sein, den Schülern auf einem angemessenen Niveau die

---

<sup>26</sup>Natürlich befinden sich die Teilchen erst nach der Bell-Messung in einem der Bell-Zustände. Wie die mathematische Beschreibung von Bennets Protokoll in Kapitel 4.1 zeigt, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man bei der Bell-Messung einen bestimmten Bell-Zustand bei der Quantenteleportation misst, gleich  $\frac{1}{4}$ , d.h. das Ergebnis ist rein zufällig.

Verschränkung und die Erzeugung verschränkter Photonen zu erklären. Auch der Hong-Ou-Mandel-Effekt kann meines Erachtens nach unter Verwendung der von der Universität Erlangen bereitgestellten Internetseite den Schülern erklärt werden.

Um die Quantenteleportation im Unterricht behandeln zu können, sollte man daher diese physikalischen Schwierigkeiten berücksichtigen und mit den Schülern die benötigten Grundlagen erarbeiten. Dies sollte mit geeigneten Materialien (siehe folgender Abschnitt) möglich sein. Offen bleibt an dieser Stelle die Frage, ob man die Grundlagen im Vorfeld besprechen sollte, oder ob man sie zusammen mit der Quantenteleportation behandelt, wenn man an den entsprechenden Stellen des Protokolls von Bennett angekommen ist.

### 5.2.3 Materialien und Experimente

Die sicherlich größte Schwierigkeit stellt die Tatsache dar, dass es kaum Material und Experimente zur Quantenteleportation für den Schulunterricht gibt. Insbesondere ist es mit den Mitteln, die in der Schule zur Verfügung stehen, nicht möglich, Versuche mit einzelnen Quantenteilchen (z.B. Photonen) oder verschränkten Quantenteilchen durchzuführen, weshalb die Verschränkung und die Erzeugung verschränkter Photonen zu den Schwierigkeiten zählt, welche die Schüler im Zusammenhang mit der Quantenteleportation haben (siehe vorheriger Abschnitt). Dadurch lässt sich zudem das Fehlen der Verschränkung im Lehrplan für die Oberstufe erklären.

Natürlich geht mit dem Fehlen der Verschränkung im Lehrplan die Tatsache einher, dass verschränkte Teilchen in der Regel nicht in den Schulbüchern auftauchen, da sich die Schulbuchverlage an den Lehrplänen orientieren. Dadurch gibt es zum Thema Verschränkung entsprechend wenig geeignetes Material für den Unterricht.

Viele Lehrer würden daher den Versuch, die Quantenteleportation im Schulunterricht zu behandeln, als gescheitert ansehen. Jedoch gibt es bereits aktuelle Schulbücher, in denen die Verschränkung als Thema vorkommt. Ein Beispiel hierfür ist [48]. Dort wird auf Seite 314 f. zunächst die Verschränkung und auf S. 316 f. sogar die Quantenteleportation behandelt.

Allerdings lässt sich nur unter Verwendung der vier Seiten des Schulbuchs keine komplette Unterrichtsreihe zur Quantenteleportation realisieren, weshalb zusätzliches Material not-

wendig ist. Dabei sollte bedacht werden, dass das Material sowohl inhaltlich als auch vom Anforderungsniveau zu dem jeweiligen Kurs passen sollte. Die Originalarbeiten, welche in dieser Arbeit zitiert wurden, sind daher für den Unterricht nicht zu verwenden.

Eine Option bieten hier populärwissenschaftliche Artikel und Bücher. In [49] findet man einige leicht verständliche Artikel aus dem Themenkreis der Quanteninformation, zu welchem u.a. die Quantenteleportation, die Quantenkryptographie und der Quantencomputer zählen. Insbesondere der Artikel von Anton Zeilinger mit dem Titel „*Quantenteleportation*“, welcher dort auf S.14 ff. zu finden ist, eignet sich für den Einsatz in der Schule. Mit zahlreichen Abbildungen und ohne Mathematik erklärt Zeilinger nicht nur die Theorie der Quantenteleportation, sondern beschreibt auch die experimentelle Realisierung, welche er und sein Team 1998 vornahmen.

Auch das Buch von Silvia Arroyo Camejo [37] ist für den Einsatz im Unterricht geeignet. Zwar beinhaltet dieses Buch nicht nur das Themengebiet der Verschränkung und der Quantenteleportation, sondern auch alle anderen Teilgebiete der Quantenphysik, allerdings sind die Darstellungen der einzelnen Themen relativ kurz gehalten und in einer für Schüler leicht verständlichen Sprache verfasst, da die Autorin zum Zeitpunkt der Entstehung dieses Buches erst 17 Jahre alt war und noch ein Gymnasium besuchte. Im Unterschied zu [49] werden viele physikalische Zusammenhänge auch in Formeln ausgedrückt, wobei nur elementare mathematische Kenntnisse zum Verstehen der Formeln und ihrer Herleitungen benötigt werden.

Mathematischer ist das 9. Kapitel des Buches von Peter Schmüser [50]. Dort wird die Nichtlokalität der Quantenphysik ausführlich beschrieben, wobei das EPR-Experiment und die Verschränkung eine zentrale Rolle spielen. Obwohl sich das Buch nicht an Schüler sondern an Lehramtsstudenten richtet, kann das 9. Kapitel auch in einem Leistungskurs verwendet werden, da es verständlich geschrieben ist und eine eigenständige Einheit bildet, sodass es nicht notwendig ist, die vorausgehenden Kapitel zu lesen und zu verstehen.

Ergänzend sollte noch didaktisch aufbereitetes Material verwendet werden. Hierfür gibt es zur Zeit jedoch kein wirkliches Angebot. Im Rahmen dieser Masterarbeit konnten Materialien des Kett-Verlags in Augenschein genommen werden [51]. Das besondere bei dem bereitgestellten Material ist die Tatsache, dass das auf der DVD befindliche Lernprogramm sowohl den etablierten Zugang zur Quantenphysik als auch einen Zugang über



einzelne Photonen und Verschränkung ermöglicht. Erreicht wird dies durch einen Aufbau, in welchem die einzelnen Themen in Form einzelner, teilweise aufeinander aufbauender Stationen präsentiert werden.

Mithilfe dieser DVD lässt sich bereits gut eine Unterrichtsreihe entwickeln, da sie sehr umfassend und didaktisch aufbereitet die Theorie zur Verschränkung und zu Einzelphotonenexperimenten darstellt. Auch werden die mathematischen Strukturen der Quantenphysik in einigen Stationen behandelt. Insbesondere der Hilbert-Raum wird schülergerecht eingeführt. Jedoch ist anzumerken, dass die notwendigen mathematischen Kenntnisse, wengleich sie sich auf Schulniveau bewegen, teilweise ambitioniert angewendet werden. Daher ist es wichtig, dass die Schüler mit der DVD nicht allein gelassen werden, sondern der Lehrer immer wieder unterstützend eingreift und Hilfestellungen anbietet. Zudem sollte der Lehrer den Einsatz der DVD sowohl gut vor- als auch nachbereiten und ggf. weitere didaktische Reduktionen vornehmen.

Im Unterricht könnte mit der DVD zudem ein Methoden- und Medienwechsel vorgenommen werden, sodass die Motivation der Schüler gesteigert werden kann. Insbesondere empfiehlt sich die Gruppen- oder Partnerarbeit, da dadurch auch die in den EPA<sup>27</sup> für das Fach Physik geforderten kommunikativen Kompetenzen gefördert werden können. Hinzu kommt, dass das Arbeiten mit der DVD in Gruppen die Erarbeitung des Stoffes erleichtert, da komplizierte Inhalte innerhalb der Gruppe besprochen werden können und durch diese Diskussionen ein besseres Verständnis des Stoffes erreicht werden kann.

Natürlich kann eine DVD keine Experimente ersetzen, selbst dann, wenn zahlreiche Experimente erklärt und anhand von Abbildungen veranschaulicht werden. Hier könnte die Internetseite des Schülerlabors der Universität Erlangen helfen [53]. Neben ebenfalls didaktisch aufbereiteten Texten zu verschiedenen Phänomenen der Quantenphysik, werden jeweils passende Experimente angeboten. Diese sind jedoch keine RCLs<sup>28</sup>, sondern IBEs<sup>29</sup>, d.h. eine Art Simulation, bei der jedoch keine Werte berechnet werden, sondern Messwerte, die bei einer Durchführung des jeweiligen Experimentes an der Universität Erlangen aufgenommen wurden.

---

<sup>27</sup>Einheitliche Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung. Für das Fach Physik findet man sie unter [52].

<sup>28</sup>Remotely Controlled Laboratories. Mehr Information zu RCLs findet man in [54].

<sup>29</sup>Interaktive Bildschirmexperimente, siehe [55].

Zwar sind mit IBEs immer noch keine Experimente im Schulunterricht möglich, jedoch wird den Schülern deutlich, wie solche Experimente aussehen und welche Ergebnisse sie liefern. Hinzu kommt, dass, anders als bei Simulationen üblich, auch Messungenauigkeiten und -fehler (z.B. systematische Fehler des Versuchsaufbaus) in den Werten enthalten sind. Dadurch wird den Schülern nicht eine idealisierte Welt vorgegaukelt, sondern sie erkennen, dass die Realität auch von der physikalischen Beschreibung abweichen kann. Insbesondere können die Abweichungen von der idealisierten physikalischen Beschreibung im Unterricht aufgegriffen und diskutiert werden, sodass dadurch sowohl die fachlichen als auch kommunikativen Kompetenzen gefördert und ein besseres Verständnis für das Modelldenken in der Physik erreicht werden können.

Festzuhalten bleibt, dass es bereits heute für den Unterricht geeignetes Material zum Thema Verschränkung und Quantenteleportation gibt. Sicherlich wird es in Zukunft neben dem vorgestellten Material auch noch weitere Quellen und Materialien geben, da die Verschränkung in Zukunft immer wichtiger werden wird. Dennoch sollte jeder Lehrer, der sich dafür entscheidet dieses Themengebiet im Unterricht zu behandeln, das Material im Vorfeld kritisch prüfen und durch geeignete didaktische Reduktionen und Aufbereitungen das Anforderungsniveau an das Leistungsniveau des jeweiligen Kurses anpassen. Schließlich ist das Thema komplex und es ist leider nicht möglich im Unterricht dazu passende Experimente durchzuführen.

### 5.3 Präkonzepte

Im Zusammenhang mit der Quantenteleportation dürften viele Schüler mit Präkonzepten in den Unterricht kommen, da die Teleportation in vielen Science-Fiction Büchern, Filmen und Serien vorkommt. Die bekannteste Serie ist dabei wohl Star Trek.

Natürlich gibt es zwischen verschiedenen Autoren bzw. Serien Unterschiede hinsichtlich der Realisierung der Teleportation. In einigen Fällen wird die Materie des zu teleportierenden Objektes wirklich vom einem Ort zum anderen transportiert, in anderen wird das Objekt am Zielort aus der dort befindlichen Materie neu erschaffen.

Die Präkonzepte dürften daher im Wesentlichen mit der zu Beginn von Kapitel 4 gegebenen Darstellung der Teleportation in Star Trek übereinstimmen, wobei die Fragen am Ende von Abschnitt 4.1 auch in den Präkonzepten der Schüler verankert seien dürften.

Es stellt sich daher die Frage, wie man mit diesen Präkonzepten umgehen soll. Aus meiner Sicht empfiehlt es sich, an diese Konzepte anzuknüpfen und sie im Laufe des Unterrichts als fehlerbehaftet zu entlarven. Im Anschluss sollte dann die Quantenteleportation nach Bennett besprochen werden und die entsprechenden (Fehl-)Vorstellungen umgedeutet werden.

Als Einstieg in eine entsprechende Unterrichtseinheit sollten die Präkonzepte aufgegriffen werden. Da aber sicherlich nicht jeder Schüler sich mit Literatur oder Filmen bzw. Serien aus dem Gebiet der Science-Fiction beschäftigt, sollten zu Beginn alle Schüler auf den gleichen Stand gebracht werden. Eine Möglichkeit würde hier die Auswahl einer geeigneten Szene aus Star Trek oder einem passenden Film bzw. einer passenden Serie bieten. In dieser Szene sollte ein kompletter Teleportationsprozess zu sehen sein, damit alle Schüler wissen, wie in etwa die Teleportation dort abläuft. Im Anschluss sollte die Szene besprochen werden, wobei das Hauptaugenmerk natürlich auf dem Ablauf der Teleportation liegen sollte. Anhand dieser Beschreibung sollte mit allen Schüler gemeinsam besprochen werden, welche physikalischen Abläufe hinter den einzelnen Schritten der Teleportation stecken (beispielsweise der Messprozess, der Transport von Materie usw.). Ist dies erfolgt, so sollen die physikalischen Ungenauigkeiten aufgezeigt werden. Besonders deutlich in allen Fällen der Teleportation dürfte dies beim Messprozess der Fall sein. Die Ungenauigkeiten bzw. Probleme und Fehler wurden in Kapitel 4 dargelegt. Es empfiehlt sich dann ein analoges Vorgehen zu diesem Kapitel, wobei natürlich geeignete Reduktionen vorgenommen und entsprechende Materialien (vgl. Abschnitt 5.2) verwendet werden sollten.

## 5.4 Fazit

Obwohl die Quantenteleportation auf den ersten Blick sehr kompliziert erscheint, lässt sie sich jedoch mit relativ einfachen mathematischen Mitteln erklären. Dies ermöglicht es, die Quantenteleportation mit den Schülern eines Leistungskurses Physik mathematisch zu behandeln.

Allerdings gibt es keine Experimente zur Verschränkung und Quantenteleportation für den Schulunterricht. Abhilfe kann hier die Internetseite des Schülerlabors der Universität Erlangen [53] schaffen, auf welcher einige Experimente (z.B. zur Verschränkung oder zum Hong-Ou-Mandel-Effekt) als IBE zur Verfügung gestellt werden. Diese IBEs besitzen zwar aus fachdidaktischer Sicht Nachteile gegenüber einem Realexperiment im Unterricht, auf Grund ihrer Beschaffenheit sind sie jedoch geeigneter als Simulationen und können bei einer entsprechenden Kombination mit anderen Unterrichtsmaterialien ein Experiment ersetzen.

Wichtig ist jedoch eine gute Vorbereitung einer entsprechenden Unterrichtseinheit durch die Lehrkraft. Insbesondere sollte das verwendete Material vom Schwierigkeitsgrad her an den jeweiligen Kurs angepasst und die vorhandenen Präkonzepte der Schüler im Unterricht berücksichtigt werden.

Wenngleich eine unterrichtspraktische Erprobung im Rahmen dieser Masterarbeit nicht durchgeführt werden konnte, sollte es mit den momentan verfügbaren Materialien möglich sein, die Quantenteleportation im Physikunterricht eines Leistungskurses zu behandeln oder einem interessierten Schüler ein entsprechendes Facharbeitsthema zu geben. Insbesondere dürfte die Quantenteleportation das Interesse der Schüler am Physikunterricht fördern, da es sich um vergleichsweise neue Anwendung physikalischen Wissens handelt, welche allerdings schon seit geraumer Zeit die Menschheit fasziniert.

## A Ergänzungen zu den mathematischen Grundlagen

### A.1 Wichtige Begriffe aus der Algebra

Die Darstellung der mathematischen Grundlagen in Kapitel 2 wurde relativ kurz gehalten. Einige wichtige Begriffe und Definitionen aus dem Bereich der Algebra, insbesondere der linearen Algebra wurden dabei als bekannt vorausgesetzt.

In diesem Anhang werden daher die wichtigsten Begriffe und Definitionen eingeführt. Dabei orientiert sich der Anhang an [4], dem Skript zu der Anfängervorlesung für Mathematikstudenten in den beiden ersten Semestern an der TU Kaiserslautern. In diesem Skript werden die Begriffe, Strukturen und Konzepte ausführlicher behandelt und mit vielen Beispielen veranschaulicht. Dort findet man auch grundlegende Definitionen, welche für die folgenden Definitionen und Sätze vorausgesetzt werden.

#### A.1.1 Vektorräume

##### Definition A.1. *Körper*

Sei  $K$  eine nicht-leere Menge und

$$+ : K \times K \rightarrow K : (x, y) \mapsto x + y \quad (156)$$

$$\cdot : K \times K \rightarrow K : (x, y) \mapsto x \cdot y \quad (157)$$

zwei Verknüpfungen, dann heißt das Tripel  $(K, +, \cdot)$  ein **Körper**, falls

- $(K, +)$  eine abelsche Gruppe mit neutralem Element  $0_K$  ist,
- $(K \setminus \{0_K\}, \cdot)$  eine abelsche Gruppe mit neutralem Element  $1_K$  ist und
- $\forall x, y, z \in K$  gilt  $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z := xz + yz$ .

##### Definition A.2. *Vektorraum und Unterraum*

Sei  $V \neq \emptyset$  eine Menge und  $K$  ein Körper, dann heißt  $V$  zusammen mit den Verknüpfungen

$$+ : V \times V \rightarrow V : (x, y) \mapsto x + y \quad (158)$$

$$\cdot : K \times V \rightarrow V : (\lambda, x) \mapsto \lambda x \quad (159)$$

$K$ -**Vektorraum**, wenn

- a)  $(V, +)$  eine abelsche Gruppe ist
- b) für alle  $x \in V$  gilt:  $1_K x = x$
- c) für alle  $\lambda \in K$  und  $x, y \in V$  gilt:  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
- d) für alle  $\lambda, \mu \in K$  und  $x \in V$  gilt:  $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
- e) für alle  $\lambda, \mu \in K$  und  $x \in V$  gilt:  $\lambda(\mu x) = (\lambda \cdot \mu)x$ .

Die Elemente von  $V$  heißen dann **Vektoren**, die Elemente von  $K$  nennt man **Skalare**. Eine Menge  $U \subset V$  heißt **Unterraum** von  $V$ , wenn  $U$  selbst ein Vektorraum ist. In diesem Fall schreibt man  $U \leq V$ .

Diese Definition ist sehr unanschaulich, die folgenden Beispiele sollen den Begriff des Vektorraums illustrieren. Dabei erfolgt, wie im Folgenden vorausgesetzt, eine Einschränkung auf Körper mit der Charakteristik<sup>30</sup>  $\text{char}(K) = 0$ .

**Beispiel A.3. (Vektorräume)**

- a) Die Menge  $\mathbb{C}^n := \overbrace{\mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}^{n\text{-mal}}$  bildet mit der komponentenweisen Addition und der komponentenweisen Multiplikation mit einem Skalar einen Vektorraum. Die Elemente von  $\mathbb{C}^n$  sind  $n$ -Tupel und werden meist als Spaltenvektoren

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

geschrieben.

- b) Die Menge aller Polynome über einem Körper  $K$ , deren Grad kleiner oder gleich einer festen Zahl  $n \in \mathbb{N}$  ist, d.h. die Menge

$$\{f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_n, \dots, a_0 \in K, n \in \mathbb{N} \text{ fest}\},$$

bildet mit der Addition von Funktionen und der Multiplikation mit einem Skalar einen Vektorraum.

---

<sup>30</sup>Die Charakteristik eines Körpers  $K$  ist definiert als  $\text{char}(K) := \min\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid n \cdot 1_K = 0_K\}$ . Existiert das Minimum nicht, so setzt man formal  $\text{char}(K) = 0$  (vgl. [56], S.6).

Wie diese Beispiele zeigen, kann ein Vektorraum unendlich viele Elemente besitzen. Dies ist natürlich für die Handhabung problematisch, weshalb das Konzept der Basis und der Dimension sehr hilfreich ist.

**Definition A.4. Erzeugendensystem, Basis und Dimension**

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $B = \{b_1, \dots, b_n\} \subset V$ .

- a)  $B$  heißt **Erzeugendensystem** von  $V$ , wenn sich jeder Vektor  $x \in V$  schreiben lässt als

$$x = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n, \tag{160}$$

wobei  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ .

- b)  $B$  heißt **linear unabhängig**, wenn

$$\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \tag{161}$$

gilt.

- c)  $B$  heißt **Basis**, wenn  $B$  ein Erzeugendensystem und linear unabhängig ist.

- d) Ist  $B$  eine Basis von  $V$ , dann definiert man die **Dimension** von  $V$  als

$$\dim(V) = |B|, \tag{162}$$

wobei  $|B|$  für die Mächtigkeit der Menge  $B$  und damit für die Anzahl der Vektoren in der Basis steht.

- e) Eine Menge  $U \subset V$  heißt **Untervektorraum** von  $V$ , wenn für alle  $u, v \in U$  und  $\lambda \in K$  auch  $u + v \in U$  und  $\lambda u \in U$  gilt.

Im Folgenden werden nur noch endlichdimensionale Vektorräume betrachtet. Eine Darstellung wie in Gleichung (160) nennt man dann auch **Linearkombination** der Vektoren  $b_1, \dots, b_n$ . Das Besondere an einer Basis ist, dass die Darstellung eines Vektors als Linearkombination der Basisvektoren eindeutig ist.

**Lemma A.5.**

Sei  $\{b_1, \dots, b_n\}$  eine Basis des  $K$ -Vektorraums  $V$  und  $x \in V$  beliebig. Dann ist die Darstellung von  $x$  als Linearkombination von  $b_1, \dots, b_n$  eindeutig.

Beweis: Angenommen die Darstellung wäre nicht eindeutig, d.h. es gibt  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  und  $\mu_1, \dots, \mu_n \in K$  mit

$$x = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$$

und  $\lambda_i \neq \mu_i$  für ein  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Dann gilt aber

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n - (\mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n) \\ &= (\lambda_1 - \mu_1) b_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) b_n. \end{aligned} \tag{163}$$

Da  $b_1, \dots, b_n$  eine Basis bilden, sind sie insbesondere linear unabhängig. Folglich kann Gleichung (163) nur dann erfüllt sein, wenn alle Koeffizienten gleich 0 sind. Dies bedeutet aber  $\lambda_i = \mu_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$  im Widerspruch zur Voraussetzung  $\lambda_i \neq \mu_i$  für mindestens ein  $i$ . □

Die Eindeutigkeit der Darstellung liefert zusammen mit den Eigenschaften einer Basis, dass ein Vektorraum eindeutig durch eine Basis bestimmt ist. Möchte man also einen Vektorraum angeben, so genügt es eine Basis anzugeben. Dadurch lässt sich der kleinste (Unter-)Vektorraum, der eine Teilmenge  $M$  eines Vektorraums  $V$  beinhaltet, definieren.

**Definition A.6. Erzeugnis**

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $M = \{m_1, \dots, m_n\} \subset V$ , dann nennt man den Vektorraum

$$\text{Lin}(M) := \{\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \dots + \lambda_n m_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K\} \tag{164}$$

das **Erzeugnis** oder die **lineare Hülle** von  $M$ .

Natürlich gilt für eine Basis  $B$  des Vektorraums  $V$ , dass  $\text{Lin}(B) = V$ .

**A.1.2 Lineare Abbildungen**

In diesem Abschnitt wird die mathematische Theorie zu den linearen Operatoren etwas ausführlicher behandelt.

**Definition A.7. Morphismus**

Seien  $V, W$  zwei  $K$ -Vektorräume, dann heißt die Abbildung

$$\alpha : V \rightarrow W : x \mapsto \alpha(x), \tag{165}$$



welche die folgenden Eigenschaften erfüllt

- $\forall x, v \in V$  gilt:

$$\alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y) \tag{166}$$

- $\forall \lambda \in K$  gilt:

$$\alpha(\lambda x) = \lambda \alpha(x) , \tag{167}$$

Vektorraumhomomorphismus oder kurz **Morphismus**.

Die Operatoren der Quantenmechanik (siehe Kapitel 2) sind mathematisch gesprochen also nichts anderes als Morphismen.

Es gibt jedoch verschiedene Arten von Morphismen, welche unterschiedliche Eigenschaften besitzen.

**Definition A.8. Endomorphismen und Isomorphismen**

Sei  $\alpha : V \rightarrow W$  ein Morphismus, dann heißt  $\alpha$

- a) **Endomorphismus**, wenn  $V = W$

- b) **Isomorphismus**, wenn es einen Morphismus  $\beta : W \rightarrow V$  gibt, so dass

$$\beta(\alpha(x)) = x$$

für alle  $x \in V$  gilt. In diesem Fall schreibt man  $\beta = \alpha^{-1}$  und nennt  $\beta$  die **Inverse** zu  $\alpha$ . Die Vektorräume  $V, W$  nennt man dann zueinander **isomorph** und schreibt  $V \cong W$ .

Besonders wichtig und nützlich sind Isomorphismen. Sie erhalten nicht nur die Struktur des ursprünglichen Vektorraums, sondern haben auch folgende Eigenschaften:

**Lemma A.9.**

Seien  $V, W$  zwei  $K$ -Vektorräume und  $\alpha : V \rightarrow W$  ein Isomorphismus, dann gilt

- a)  $\text{Ker}(\alpha) := \{x \in V \mid \alpha(x) = 0\} = \{0\}$
- b)  $\text{Im}(\alpha) := \{y \in W \mid \exists x \in V : \alpha(x) = y\} = W$
- c)  $\dim(V) = \dim(W)$

d) Ist  $\{b_1, \dots, b_n\}$  eine Basis von  $V$ , so ist  $\{\alpha(b_1), \dots, \alpha(b_n)\}$  eine Basis von  $W$ .

Beweis:

a) Angenommen  $\text{Ker}(\alpha) \neq \{0\}$ , d.h. es gibt ein  $0 \neq x \in V$  mit  $\alpha(x) = 0$ . Dann gilt aber  $\alpha(y + x) = \alpha(y)$  für alle  $y \in V$ . Folglich kann es keinen Morphismus  $\beta$  geben mit  $\beta(\alpha(z)) = z$  für alle  $z \in V$ , denn es wäre dann  $y + x = \beta(\alpha(y + x)) = \beta(\alpha(y)) = y$ , im Widerspruch zu  $x \neq 0$ .

b),c) Nach a) gilt  $\dim(\text{Ker}(\alpha)) = 0$ . Mit [4] S. 143 Satz 13.27 folgen direkt die Behauptungen von b) und c).

d) Siehe [4] S.140 Satz 13.18.

□

Diese Eigenschaften sagen, dass zwei zueinander isomorphe Vektorräume  $V, W$  im Prinzip identisch sind, denn neben der Erhaltung der Vektorraumstruktur durch einen Isomorphismus kann jede Berechnung in  $V$  nach der Anwendung des Isomorphismus auch zuerst in  $W$  ausgeführt und anschließend das Ergebnis aus  $W$  mit der zugehörigen Umkehrabbildung nach  $V$  abgebildet werden, ohne dass sich die resultierenden Ergebnisse in  $V$  unterscheiden.

Dieses führt zu folgendem Satz.

**Satz A.10.**

Sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum der Dimension  $n$ , dann gilt  $V \cong K^n$ .

Beweis: Aiehe [4] S. 139, Satz 13.16.

□

Zum Abschluss dieses Unterkapitels sei noch gezeigt, dass die Menge aller Morphismen zwischen zwei  $K$ -Vektorräumen selbst einen Vektorraum bildet.

**Lemma A.11.**

Seien  $V, W$  zwei  $K$ -Vektorräume dann bildet die Menge

$$\text{Hom}(V, W) := \{\alpha \mid \alpha : V \rightarrow W \text{ Homomorphismus}\} \quad (168)$$

mit der Addition, definiert über

$$(\alpha + \beta)(x) = \alpha(x) + \beta(x) \quad (169)$$

und der Multiplikation mit einem Skalar einen  $K$ -Vektorraum.

Beweis:

Man rechnet leicht nach, dass alle Eigenschaften eines Vektorraums erfüllt werden. Insbesondere bildet  $(\text{Hom}(V, K), +)$  eine abelsche Gruppe mit neutralem Element  $0 : V \rightarrow W : x \mapsto 0$  und dem inversen Element zu  $\alpha$  gegeben durch  $\tilde{\alpha} : V \rightarrow W : x \mapsto -\alpha(x)$ .  $\square$

### A.1.3 Matrizen

Die bisher verwendete Form der Darstellung von Morphismen ist relativ unhandlich für Rechnungen. In diesem Unterkapitel soll eine einfachere Darstellung für Morphismen entwickelt werden. Dazu wird die folgende Definition zentral:

#### Definition A.12. Matrizen

Sei  $K$  ein Körper und  $m, n \in \mathbb{N}$ . Eine  $m \times n$ -**Matrix** ist ein rechteckiges Zahlenschema der Form

$$A = (a_{ij})_{ij} := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (170)$$

wobei  $a_{ij} \in K$  für alle  $i, j$ . Die Menge aller  $m \times n$ -Matrizen über  $K$  wird mit  $\text{Mat}(m \times n, K)$  bezeichnet. Ist  $m = n$ , d.h. ist die Matrix quadratisch, so schreibt man kurz  $\text{Mat}(n, K)$ .

Die folgenden Beispiele sollen die Definition der Matrix mit Leben füllen.

#### Beispiel A.13.

a) Die  $n \times n$ -Matrix

$$E_n = \mathbf{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (171)$$

heißt **Einheitsmatrix** oder **Identität**.

b) Der Spaltenvektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 - i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \quad (172)$$

ist im Sinne der Matrixdefinition eine  $3 \times 1$ -Matrix.

Auf  $\text{Mat}(m \times n, K)$  und  $\text{Mat}(n, K)$  lassen sich zwei Verknüpfungen definieren.

**Definition A.14. Matrixaddition und -multiplikation**

Sei  $K$  ein Körper, dann definiert man auf  $\text{Mat}(m \times n, K)$  die Addition durch

$$+ : \text{Mat}(m \times n, K) \times \text{Mat}(m \times n, K) \rightarrow \text{Mat}(m \times n, K) : ((a_{ij})_{ij}, (b_{ij})_{ij}) \mapsto (a_{ij} + b_{ij})_{ij}. \quad (173)$$

Ferner ist es möglich, eine Multiplikation von Matrizen zu definieren.

$$\cdot : \text{Mat}(m \times n, K) \times \text{Mat}(n \times p, K) \rightarrow \text{Mat}(m \times p, K) : ((a_{ij})_{ij}, (b_{jk})_{jk}) \mapsto \sum_{j=1}^n (a_{ij} \cdot b_{jk})_{ik}. \quad (174)$$

Damit kann man zeigen, dass die Matrizen eine Gruppe bilden.

**Lemma A.15.**

Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ , dann ist  $(\text{Mat}(m \times n, \mathbb{C}), +)$  ist eine Gruppe.

Beweis: Es sind die Gruppeneigenschaften nachzuweisen.

- Seien  $(a_{ij})_{ij}, (b_{ij})_{ij}, (c_{ij})_{ij} \in \text{Mat}(n \times m, K)$ , so gilt

$$\begin{aligned} (a_{ij})_{ij} + ((b_{ij})_{ij} + (c_{ij})_{ij}) &= (a_{ij})_{ij}((b_{ij} + c_{ij})_{ij}) \\ &= (a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}))_{ij} \stackrel{K \text{ Körper}}{=} ((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij})_{ij} \\ &= ((a_{ij} + b_{ij})_{ij}) + (c_{ij})_{ij} = ((a_{ij})_{ij} + (b_{ij})_{ij}) + (c_{ij})_{ij} \end{aligned}$$

- Das neutrale Element ist offensichtlich  $(0)_{ij}$ .
- Zu  $(a_{ij})_{ij}$  ist offensichtlich  $(-a_{ij})_{ij}$  das inverse Element.

□

Basierend auf der Tatsache, dass  $\text{Mat}(m \times n, K)$  mit der Addition eine Gruppe bildet, ist es offensichtlich, dass  $\text{Mat}(m \times n, K)$  mit der Addition und der komponentenweisen Multiplikation mit einem Skalar einen Vektorraum bildet.

**Korollar A.16.**

Sei  $K$  ein Körper, dann bildet  $\text{Mat}(m \times n, K)$  mit der Addition und der komponentenweisen Multiplikation mit einem Skalar einen  $K$ -Vektorraum und es ist  $\text{Mat}(m \times n, K) \cong K^{mn}$ , d.h. es gilt  $\dim(\text{Mat}(m \times n, K)) = mn$ .

Beweis: Siehe [4] S. 146, Bemerkung 14.4.

□

**Satz A.17.**

Seien  $V, W$  zwei  $K$ -Vektorräume und  $\{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis von  $V$ , sowie  $\{w_1, \dots, w_n\} \subset W$  beliebig. Dann gibt es genau einen Morphismus  $\alpha : V \rightarrow W$  mit  $\alpha(v_i) = w_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$

Beweis:

Zu zeigen sind zwei Dinge:

- 1) Es gibt einen Morphismus mit den geforderten Eigenschaften.
- 2) Dieser Morphismus ist eindeutig.

Am einfachsten zu sehen ist 1), denn betrachtet man für  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  die Abbildung  $\alpha : V \rightarrow W$  mit

$$\alpha(x) = \alpha(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 \alpha(v_1) + \dots + \lambda_n \alpha(v_n) := \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n, \quad (175)$$

dann sieht man sofort, dass  $\alpha(v_i) = w_i$  gilt, d.h. die Abbildung erfüllt die geforderte Eigenschaft. Sind ferner  $x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$  und  $y = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$  zwei Vektoren aus  $V$ , so gilt:

$$x + y = (\lambda_1 + \mu_1)v_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n)v_n. \quad (176)$$

Somit folgt aber  $\alpha(x + y) = (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) + (\mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n) = \alpha(x) + \alpha(y)$ . Analog rechnet man nach, dass  $\alpha(\gamma x) = \gamma \alpha(x)$  für alle  $\gamma \in K$  und  $x \in V$  gilt. Die betrachtete Abbildung ist also ein Morphismus.

Um 2) zu zeigen, nimmt man an, dass es zwei Morphismen  $\alpha, \beta$  mit  $\alpha(v_i) = w_i = \beta(v_i)$  aber  $\alpha \neq \beta$  gibt. Wegen  $\alpha \neq \beta$  gibt es ein  $x \in V$  mit  $\alpha(x) \neq \beta(x)$ . Dieses  $x$  lässt sich eindeutig als Linearkombination des Basisvektoren  $v_1, \dots, v_n$  schreiben, welche gegeben ist durch

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \quad (177)$$

mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ . Es gilt dann

$$\begin{aligned}
 \alpha(x) &= \alpha(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n) \\
 &= \lambda_1 \alpha(v_1) + \lambda_2 \alpha(v_2) + \dots + \lambda_n \alpha(v_n) \\
 &= \lambda_1 \beta(v_1) + \lambda_2 \beta(v_2) + \dots + \lambda_n \beta(v_n) \\
 &= \beta(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n) \\
 &= \beta(x).
 \end{aligned} \tag{178}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme  $\alpha \neq \beta$ . Folglich ist der Morphismus eindeutig.  $\square$

Dieser Satz liefert als Korollar die Äquivalenz von Matrizen und Morphismen. Matrizen sind also nichts anderes als eine andere Darstellungsform für Morphismen zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen.

**Korollar A.18.**

*Seien  $V, W$  zwei  $K$ -Vektorräume, dann gilt*

$$\text{Hom}(V, W) \cong \text{Mat}(\dim(V) \times \dim(W), K). \tag{179}$$

Beweis: Siehe [4], S. 148, Satz 14.8 und S. 152, Lemma 14.16 sowie Folgerung 14.17.  $\square$

Möchte man einen Morphismus als Matrix darstellen, so kann die Matrix eine beliebig komplizierte Form annehmen. Als besonders einfach und schön wird eine Matrix bezeichnet, bei der nur auf der Diagonalen von 0 verschiedene Werte stehen.

**Definition A.19. Diagonalmatrizen**

*Sei  $A \in \text{Mat}(n, K)$ , dann nennt man  $A$  eine **Diagonalmatrix**, wenn*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} := \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}), \tag{180}$$

*wobei mindestens ein  $a_{ii}$  ungleich 0 ist.*

Der Vorteil einer solchen Diagonalmatrix  $A$  ist, dass sich das Bild eines Vektors  $x = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$  sehr leicht berechnen lässt, da  $Ab_i = \mu_i b_i$  gilt.

Aber lässt sich jeder Morphismus als Diagonalmatrix darstellen? Welche Eigenschaften muss der Morphismus bzw. die Matrix erfüllen? Diese Fragen lassen sich nicht so einfach beantworten. Die Grundidee ist es, die Basis des Vektorraums so zu wählen, dass möglichst alle Basisvektoren die Bedingung  $Ab_i = \mu_i b_i$  erfüllen.

Dies führt zum Begriff des Eigenvektors.

**Definition A.20. Eigenwert und Eigenvektor**

Sei  $A \in \text{Mat}(n, K)$ , dann heißt  $x \in K^n \setminus \{0\}$ , welches die Bedingung

$$Ax = \lambda x \tag{181}$$

für ein  $\lambda \in K$  erfüllt, **Eigenvektor** zum **Eigenwert**  $\lambda$ .

Die Berechnung der Eigenvektoren wird erfolgt durch das Lösen des von der Eigenwertgleichung (181) definierten linearen Gleichungssystems. Dabei ist zu beachten, dass das lineare Gleichungssystem genau dann eindeutig lösbar ist, wenn die definierende Matrix invertierbar ist. Eine eindeutige Lösung bedeutet daher, dass die einzige Lösung der Nullvektor ist, welcher nach der Definition kein Eigenvektor ist. Man betrachtet daher den Fall

$$\det(A - \lambda E_n) = 0. \tag{182}$$

**Definition A.21. Charakteristisches Polynom**

Sei  $A \in \text{Mat}(n, K)$ , dann heißt

$$\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda E_n) \tag{183}$$

das **charakteristische Polynom** von  $A$ .

Aus dieser Definition wird deutlich, dass sich die Eigenwerte einer quadratischen Matrix  $A$  als Nullstellen des charakteristischen Polynoms ergeben.

Aber wann ist die quadratische Matrix  $A$  diagonalisierbar, d.h. wann kann man sie als Diagonalmatrix schreiben? Die kurze Antwort wurde bereits gegeben lautet: Sie ist dann

diagonalisierbar, wenn man eine Basis des Vektorraums aus Eigenvektoren der Matrix bilden kann.

**Definition A.22. Diagonalisierbarkeit**

Eine Matrix  $A \in \text{Mat}(n, K)$  heißt **diagonalisierbar**, wenn es eine invertierbare Matrix  $T \in \text{Mat}(n, K)$  gibt, sodass

$$T^{-1}AT = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \tag{184}$$

für gewisse  $a_1, \dots, a_n \in K$  gibt.

Natürlich ist diese Definition sehr unhandlich, da man mit ihr nur schwer überprüfen kann, ob eine Matrix diagonalisierbar ist. Jedoch gibt es auch andere Möglichkeiten, mit denen man überprüfen kann, ob eine Matrix diagonalisierbar ist.

**Satz A.23.**

Sei  $A \in \text{Mat}(n, K)$  eine Matrix, welche den  $K$ -Vektorraum  $V$  auf sich selbst abbildet, dann sind äquivalent

- a)  $A$  ist diagonalisierbar.
- b)  $V$  besitzt eine Basis, welche nur aus Eigenvektoren von  $A$  besteht.
- c) Das charakteristische Polynom  $\chi_A$  zerfällt über  $K$  in Linearfaktoren<sup>31</sup> und für die nicht notwendigerweise verschiedenen Nullstellen  $\lambda_i$  von  $\chi_A$  gilt:

$$\mu_a(A, \lambda_i) = \dim(\text{Lin}(\{x \in V \mid Ax = \lambda_i x\})), \tag{185}$$

wobei  $\mu_a(A, \lambda_i)$  die Vielfachheit der Nullstelle  $\lambda_i$  im charakteristischen Polynom  $\chi_A$  ist.

Beweis: siehe [4] S. 186 ff.

□

Natürlich lässt sich nicht jede Matrix diagonalisieren. Dies ist für einige Anwendungen (z.B. in der Quantenphysik) problematisch, weshalb man versucht Matrizen zu kategorisieren, um einfach nachprüfbar Eigenschaften zu finden, welche garantieren, dass alle Matrizen mit dieser Eigenschaft diagonalisierbar sind. Eines der Probleme, nämlich die

---

<sup>31</sup>Ist  $\zeta(x)$  ein Polynom und lässt sich  $\zeta(x)$  für ein  $a \in K$  und ein Polynom  $\omega(x)$  niedrigeren Grades schreiben als  $\zeta(x) = (x - a)\omega(x)$ , so nennt man  $(x - a)$  einen Linearfaktor von  $\zeta(x)$ .



Tatsache, dass das charakteristische Polynom nicht zwangsläufig zerfallen muss, kann gelöst werden, indem man nur komplexwertige Matrizen betrachtet. Jedoch garantiert dies nicht, dass eine Matrix wirklich diagonalisierbar ist. Folgende Matrizen sind jedoch diagonalisierbar.

**Definition A.24. Hermitesche und unitäre Matrizen**

Sei  $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{C})$ , dann heißt  $A$

a) **hermitesch** falls  $(A^*)^T := A^\dagger = A$  gilt.

b) **unitär** falls  $AA^\dagger = A^\dagger A = \mathbb{1}$  gilt.

Hermitesche und unitäre Matrizen besitzen viele interessante Eigenschaften. Insbesondere folgt aus der Definition von unitären Matrizen sofort.

**Korollar A.25.**

Unitäre Matrizen lassen das Skalarprodukt invariant.

Beweis: Sei  $U$  eine unitäre Matrix und  $|a\rangle, |b\rangle \in \mathbb{C}^n$ , dann gilt

$$\langle a|U^\dagger U|b\rangle = \langle a|\mathbb{1}|b\rangle = \langle a|b\rangle. \tag{186}$$

□

Die sicherlich wichtigste Eigenschaft unitärer und hermitescher Matrizen ist sicherlich ihre Diagonalisierbarkeit.

**Satz A.26. Spektralsatz**

Sei  $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{C})$ , dann sind äquivalent:

a) Es gilt  $A^\dagger A = AA^\dagger$ <sup>32</sup> und  $\chi_A$  zerfällt in Linearfaktoren.

b) Es gibt eine unitäre Matrix  $T$ , sodass  $T^\dagger AT = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

Beweis: Siehe [4] S. 235, Folgerung 20.18.

□

---

<sup>32</sup>Eine Matrix, die diese Bedingung erfüllt nennt man auch normal.

Auf Grund der definierenden Eigenschaften erkennt man sofort, dass hermitesche und unitäre Matrizen die Bedingung  $\hat{A}\hat{A}^\dagger = \hat{A}^\dagger\hat{A}$  erfüllen. Ferner zerfällt das charakteristische Polynom im Fall einer Matrix aus  $\text{Mat}(n, \mathbb{C})$  immer über  $\mathbb{C}$ , so dass hermitesche und unitäre Matrizen die Eigenschaft a) aus dem Satz erfüllen. Damit ist bewiesen, dass unitäre und hermitesche Matrizen diagonalisierbar sind. Es gibt jedoch noch jeweils eine weitere Eigenschaft, welche von Bedeutung ist.

**Lemma A.27.**

Sei  $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{C})$  und  $\lambda$  ein beliebiger Eigenwert von  $A$ , dann gilt

a)  $\lambda \in \mathbb{R}$  falls  $A$  hermitesch

b)  $|\lambda| = 1$  falls  $A$  unitär

Beweis:

a) Sei  $A$  hermitesch, dann gilt für den Eigenvektor  $x$  zum Eigenwert  $\lambda$ :

$$\lambda^*|x|^2 = \lambda^*\langle x|x \rangle = \langle x|A^\dagger|x \rangle = \langle x|A|x \rangle = \lambda|x|^2 \quad (187)$$

und somit  $\lambda = \lambda^*$ .

b) Sei  $A$  unitär, dann gilt für den Eigenvektor  $x$  zum Eigenwert  $\lambda$ :

$$|x|^2 = |Ax|^2 = |\lambda x|^2 = |\lambda|^2|x|^2, \quad (188)$$

woraus direkt  $|\lambda| = 1$  folgt.

□

## A.2 Funktionen von Matrizen

In manchen Rechnungen der Quantenphysik tauchen Funktionen von Matrizen auf. Ein Beispiel hierfür ist die Entropie der Verschränkung aus Kapitel 3.4. Diese Funktionen zählen nicht zu dem alltäglichen Handwerkszeug eines Physiklehrers und sollen daher an dieser Stelle kurz eingeführt werden.

**Definition A.28. Funktionen von Matrizen**

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$  eine Funktion, welche sich als Potenzreihe der Form

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad (189)$$

darstellen lässt.

Dann definiert man für eine Matrix  $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$  die zu  $f$  gehörige Funktion von Matrizen als  $f : \text{Mat}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}(n, \mathbb{R}) : A \mapsto f(A)$  mit

$$f(A) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n. \quad (190)$$

Zur Veranschaulichung dieser Definition soll das folgende Beispiel dienen.

**Beispiel A.29.**

a) Die Matrixexponentialfunktion ist gegeben durch

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \quad (191)$$

b) Die Logarithmusfunktion ist für  $0 < x \leq 2$  gegeben durch

$$\ln(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n}. \quad (192)$$

Die entsprechende Funktion für Matrizen ist dann gegeben durch

$$\ln(A) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mathbf{1} - A)^n}{n}. \quad (193)$$

c) Mit Hilfe von b) kann man auch die Funktion  $f(x) = -x \ln(x)$  für Matrizen definieren. Es gilt:

$$f(x) = (1-x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n(n-1)} \quad (194)$$

und somit

$$f(A) = (\mathbf{1} - A) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\mathbf{1} - A)^n}{n(n-1)}. \quad (195)$$

Natürlich ist eine solche Funktion für Matrizen in der Regel schwer zu berechnen. Ist die Matrix  $A$  jedoch eine Diagonalmatrix, so lässt sich die Funktion relativ leicht auswerten. Es gilt dann:

**Satz A.30.**

Ist  $f$  eine Funktion und  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$  eine Diagonalmatrix, dann gilt

$$f(A) = \text{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)). \quad (196)$$

Beweis: Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die sich als Potenzreihe darstellen lässt, d.h. es gilt  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} f(A) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{diag}(\lambda_1^n, \dots, \lambda_n^n) = \text{diag}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda_1^n, \dots, \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda_n^n\right) \\ &= \text{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)). \end{aligned} \quad (197)$$

□

### A.3 Dimension des Produktraums

In Kapitel 2.2 wurde eine Aussage bezüglich der Dimension des Produktraumes gemacht, jedoch nicht bewiesen. Dies soll in diesem Abschnitt nachgeholt werden.

Für den Beweis ist Beispiel 2.13 von großer Bedeutung. Dort wurde gezeigt, dass das dyadische Produkt  $|v\rangle \otimes |w\rangle$  zweier Vektoren  $|v\rangle, |w\rangle$  eine Matrix ergibt. Allgemein kann man zeigen, dass für zwei Hilberträume  $\mathcal{H}, \tilde{\mathcal{H}}$  der Produktraum  $\mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$  isomorph zu  $\text{Mat}(\dim(\mathcal{H}) \times \dim(\tilde{\mathcal{H}}), \mathbb{C})$  ist.

Damit kann die folgende Aussage bewiesen werden.

**Proposition A.31.**

Seien  $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_N$  Hilberträume der Dimension  $n$ , dann gilt

$$\dim(\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N) = n^N \quad (198)$$

Beweis: per Induktion nach  $N$

IA  $N = 2$

Nach den vorausgegangenen Bemerkungen gilt:

$$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \cong \text{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n \cdot n}. \quad (199)$$

Also gilt  $\dim(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) = \dim(\mathbb{C}^{n \cdot n}) = n^2$ .

IV Die Behauptung gelte für ein  $N \geq 2$ .

IS  $N \rightarrow N + 1$

Man definiert sich den Hilbert-Raum  $\tilde{\mathcal{H}} := \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$ . Dann gilt:

$$\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{N+1} = \tilde{\mathcal{H}} \otimes \mathcal{H}_{N+1} \cong \text{Mat}(\dim(\tilde{\mathcal{H}}) \times n, \mathbb{C}) \stackrel{IV}{\cong} \text{Mat}(n^N \times n, \mathbb{C}). \quad (200)$$

Damit gilt jedoch

$$\dim(\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{N+1}) = \dim(\text{Mat}(n^N \times n, \mathbb{C})) = n \cdot n^N = n^{N+1} \quad (201)$$

□

## B Ergänzungen zu den Kapiteln 3-5

### B.1 Ergänzungen zum Dichteoperator

Der Dichteoperator  $|\phi\rangle\langle\phi|$ , wurde in Kapitel 3.4 eingeführt, um die Entropie der Verschränkung zu definieren.

Der Dichteoperator ist in der Quantenphysik jedoch nicht nur für die Entropie der Verschränkung von Bedeutung. Er enthält dieselben Informationen wie der Zustandsvektor  $|\phi\rangle$ , lässt sich jedoch in einigen Anwendungen besser handhaben. In [5] wird der Dichteoperator ausführlich in Kapitel 25 behandelt, weshalb die Darstellung im Rahmen dieser Arbeit sehr kurz gehalten wurde. Eine Ergänzung sollte jedoch erwähnt werden, damit die Definition der Entropie der Verschränkung besser verstanden werden kann.

**Lemma B.1.** (*Eigenwerte des Dichteoperators*)

Sei  $\phi \in \mathcal{H}$  ein normierter Vektor, dann hat der Dichteoperator

$$\hat{\rho}_\phi := |\phi\rangle\langle\phi|$$

genau zwei Eigenwerte, nämlich  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = 0$ .

Beweis:

Es ist offensichtlich, dass

$$\hat{\rho}_\phi|\phi\rangle = |\phi\rangle \tag{202}$$

gilt. Folglich besitzt der Operator auf jeden Fall den Eigenwert  $\lambda_1 = 1$ . Um den Rest zu zeigen, konstruiert man sich nun eine Orthonormalbasis  $B$  von  $\mathcal{H}$ , wobei  $|\phi\rangle \in B$  gelten soll. Das Ergebnis sei  $\{|\phi\rangle, |2\rangle, \dots, |n\rangle\}$ . Dann gilt:

$$\hat{\rho}_\phi|i\rangle = |\phi\rangle\langle\phi|i\rangle = 0, \tag{203}$$

weshalb  $\hat{\rho}_\phi$  bezüglich dieser Basis die Form

$$\hat{\rho}_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{204}$$

besitzt. Es ist damit aber offensichtlich, dass  $\hat{\rho}_\phi$  nur die Eigenwerte  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = 0$  besitzen kann.  $\square$

Das folgende Korollar ergibt sich direkt aus dem vorausgegangenen Beweis.

**Korollar B.2.**

*Sei  $\phi \in \mathcal{H}$  ein normierter Vektor, dann lässt sich der Dichteoperator  $\hat{\rho}_\phi$  diagonalisieren und es gilt  $\hat{\rho}_\phi = \text{diag}(1, 0, \dots, 0)$ .*

Beweis: Siehe Beweis von Lemma B.1.  $\square$

Für die Berechnung der Entropie der Verschränkung macht es also Sinn, die darin vorkommenden Dichteoperatoren in ihrer Eigenbasis darzustellen, da die Berechnung dann besonders einfach wird. Dabei sollte bedacht werden, dass  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$  weshalb man  $0 \cdot \ln(0) := 0$  setzt.

## B.2 Basistransformation für die Bell-Messung

In Kapitel 4.1 wurde behauptet, dass der Zustand des Systems bestehend aus dem zu teleportierenden Photon und dem verschränkten Photonenpaar nach dem Wechsel der Basis für die Photonen 1 und 2 die Form

$$\begin{aligned}
 |\Psi_{123}\rangle = \frac{1}{2} & \left[ |\Psi_{12}^+\rangle (-c_t |\uparrow\downarrow\rangle + c_h |\leftrightarrow\rangle) - |\Psi_{12}^-\rangle (c_t |\uparrow\downarrow\rangle + c_h |\leftrightarrow\rangle) \right. \\
 & \left. + |\Phi_{12}^+\rangle (c_t |\leftrightarrow\rangle - c_h |\uparrow\downarrow\rangle) + |\Phi_{12}^-\rangle (c_t |\leftrightarrow\rangle + c_h |\uparrow\downarrow\rangle) \right] \quad (205)
 \end{aligned}$$

annimmt. Dies ist jedoch nicht offensichtlich und wird daher im folgenden gezeigt.

Vor dem Basiswechsel hatte der Zustand die Form

$$|\Psi_{123}\rangle = \frac{c_t}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow, \uparrow, \leftrightarrow\rangle - |\uparrow\downarrow, \leftrightarrow, \uparrow\rangle) + \frac{c_h}{\sqrt{2}} (|\leftrightarrow, \uparrow, \leftrightarrow\rangle - |\leftrightarrow, \leftrightarrow, \uparrow\rangle). \quad (206)$$

Ferner gilt für einen beliebigen Zustand  $|\Psi\rangle$  und eine orthonormierte Basis  $\{|i\rangle \mid i = 1, \dots, n\}$ :

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^n \langle i|\Psi\rangle |i\rangle. \quad (207)$$

Folglich müssen nur die Skalarprodukte  $\langle i|\Psi\rangle$  berechnet werden, um den Zustand  $|\Psi\rangle$  in der Basis  $\{|i\rangle \mid i = 1, \dots, n\}$  darzustellen.

Im Falle der Basistransformation im Protokoll von Bennett ist die neue Basis

$$\{|\Psi^+, \uparrow\rangle, |\Psi^+, \leftrightarrow\rangle, |\Psi^-, \uparrow\rangle, |\Psi^-, \leftrightarrow\rangle, |\Phi^+, \uparrow\rangle, |\Phi^+, \leftrightarrow\rangle, |\Phi^-, \uparrow\rangle, |\Phi^-, \leftrightarrow\rangle\}, \quad (208)$$

wobei  $|\Psi^\pm\rangle, |\Phi^\pm\rangle$  die vier Bell-Zustände sind. Damit folgt:

$$\begin{aligned} \langle\Psi^+, \uparrow | \Psi_{123}\rangle &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle\uparrow, \leftrightarrow, \uparrow| + \langle\leftrightarrow, \uparrow, \uparrow|) \right) |\Psi_{123}\rangle \\ &= \frac{c_t}{2} (\langle\uparrow, \leftrightarrow, \uparrow | \uparrow, \uparrow, \leftrightarrow\rangle - \langle\uparrow, \leftrightarrow, \uparrow | \uparrow, \leftrightarrow, \uparrow\rangle + \langle\leftrightarrow, \uparrow, \uparrow | \uparrow, \uparrow, \leftrightarrow\rangle \\ &\quad - \langle\leftrightarrow, \uparrow, \uparrow | \uparrow, \leftrightarrow, \uparrow\rangle) + \frac{c_h}{2} (\langle\uparrow, \leftrightarrow, \uparrow | \leftrightarrow, \uparrow, \leftrightarrow\rangle - \langle\uparrow, \leftrightarrow, \uparrow | \leftrightarrow, \leftrightarrow, \uparrow\rangle \\ &\quad + \langle\leftrightarrow, \uparrow, \uparrow | \leftrightarrow, \uparrow, \leftrightarrow\rangle - \langle\leftrightarrow, \uparrow, \uparrow | \leftrightarrow, \leftrightarrow, \uparrow\rangle) \\ &= -\frac{c_t}{2} \end{aligned} \quad (209)$$

Anhand dieser Rechnung erkennt man sofort, dass

$$\langle\Psi^+, \leftrightarrow | \Psi_{123}\rangle = \frac{c_h}{2} \quad (210)$$

gilt. Völlig analoge Rechnungen für die anderen Basisvektoren ergeben:

$$\langle\Psi^-, \uparrow | \Psi_{123}\rangle = -\frac{c_t}{2} \quad (211)$$

$$\langle\Psi^-, \leftrightarrow | \Psi_{123}\rangle = -\frac{c_h}{2} \quad (212)$$

$$\langle\Phi^\pm, \uparrow | \Psi_{123}\rangle = \mp \frac{c_h}{2} \quad (213)$$

$$\langle\Phi^\pm, \leftrightarrow | \Psi_{123}\rangle = \frac{c_t}{2}. \quad (214)$$

Somit lässt sich  $|\Psi_{123}\rangle$  schreiben als

$$\begin{aligned} |\Psi_{123}\rangle &= -\frac{c_t}{2} |\Psi^+, \uparrow\rangle + \frac{c_h}{2} |\Psi^+, \leftrightarrow\rangle - \frac{c_t}{2} |\Psi^-, \uparrow\rangle - \frac{c_h}{2} |\Psi^-, \leftrightarrow\rangle - \frac{c_h}{2} |\Phi^+, \uparrow\rangle \\ &\quad + \frac{c_t}{2} |\Phi^+, \leftrightarrow\rangle + \frac{c_h}{2} |\Phi^-, \uparrow\rangle + \frac{c_t}{2} |\Phi^-, \leftrightarrow\rangle. \end{aligned}$$

Durch Ausklammern der Bell-Zustände erhält man hieraus Gleichung (205).



## Literatur

- [1] M. Planck, *Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum*, Ann. Phys. **309** (1901) 553–563
- [2] A. Einstein, *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt*, Ann. Phys. **322** (1905) 132–148
- [3] H. J. Korsch, *Mathematik für Physik 3 – Mathematik der Quantenmechanik*, Vorlesungsskript, TU Kaiserslautern, 2011
- [4] A. Gathmann, *Grundlagen der Mathematik*, Vorlesungsskript, Technische Universität Kaiserslautern, 2007-2011.  
<http://www.mathematik.uni-kl.de/~gathmann/class/gdm-2007/main.pdf>
- [5] K. Schilcher, *Theoretische Physik kompakt für das Lehramt*, Oldenbourg, 2010
- [6] E. Schrödinger, *Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik*, Naturwissenschaften **23** (1935) 807–812, 823–828, 844–849
- [7] E. P. Fischer, *Schrödingers Katze auf dem Mandelbrotbaum*, Pantheon, 2007
- [8] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, *Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem*, Phys. Rev. Lett. **47** (1981) 460–463
- [9] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, *Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities*, Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 91–94
- [10] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*, Phys. Rev. **47** (1935) 777–780
- [11] N. Bohr, *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?*, Phys. Rev. **48** (1935) 696–702
- [12] D. Bohm and Y. Aharonov, *Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky*, Phys. Rev. **108(4)** (1957) 1070–1076
- [13] C. S. Wu and I. Shaknov, *The Angular Correlation of Scattered Annihilation Radiation*, Phys. Rev. **77** (1950) 136–136

- [14] M. B. Plenio and V. Vedral, *Teleportation, entanglement and thermodynamics in the quantum world*, Contemporary Physics **39(6)** (1998) 431–446
- [15] M. M. Wolf, S. Nimmrichter, et al., *Quantum Information Theorie*,. Vorlesungsskript, 2008.  
[http://www.coqus.at/fileadmin/quantum/coqus/documents/Michael\\_Wolf/QITSkript\\_v20\\_01.pdf](http://www.coqus.at/fileadmin/quantum/coqus/documents/Michael_Wolf/QITSkript_v20_01.pdf)
- [16] H. Niemeyer, *Verschänkungskriterien*,. Bachelorarbeit, Universität Osnabrück, 2009.  
<http://msuq.physik.uni-osnabrueck.de/pdf/bachelor-niemeyer.pdf>
- [17] J. S. Bell, *On the Einstein Podolsky Rosen Paradox*, Physics **1** (1964) 195–200
- [18] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt, *Proposed Experiment to Test Lokal Hidden-Variable Theories*, Phys. Rev. Lett. **23** (1969) 880–884
- [19] P. G. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter, A. Zeilinger, et al., *New High-Intensity Source of Polarization-Entangled Photon Pairs*, Phys. Rev. Lett. **356** (1995) 4337–4341
- [20] S. Müller, *Frequenzverschränkung bei der parametrischen Fluoreszenz*,. Bachelorarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität München, 2009.  
[http://xqp.physik.uni-muenchen.de/publications/files/theses\\_bachelor/bachelor\\_muellers.pdf](http://xqp.physik.uni-muenchen.de/publications/files/theses_bachelor/bachelor_muellers.pdf)
- [21] P. G. Kwiat et al., *Ultrabright source of polarization-entangled photons*, Phys. Rev. A **60(2)** (1999) 773–776
- [22] <http://techtrify.com/wp-content/uploads/2011/05/startrektransporter.jpg>
- [23] C. H. Bennett, G. Brassard, et al., *Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels*, Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 1895–1899
- [24] A. Einstein and M. Born, *Briefwechsel 1916 - 1955*, Nymphenburger Verlagshandlung, München, Neuauflage 1991
- [25] D. Bouwmeester, K. Mattle, J.-W. Pan, H. Weinfurter, A. Zeilinger, and M. Zukowski, *Experimental quantum teleportation of arbitrary quantum states*, Appl. Phys. B (**67**) (1998) 749–752

- 
- [26] D. Bouwmeester, A. Zeilinger, et al., *Experimental quantum teleportation*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A **(356)** (1998) 1733–1737
- [27] J. Yin, H. Lu, J.-G. Ren, et al., *Teleporting independent qubits through a 97 km free-space channel*, ArXiv e-prints (2012),  
<http://arxiv.org/pdf/1205.2024v1.pdf>
- [28] M. Michler, A. Zeilinger, et al., *Interferometric Bell-state analysis*, Phys. Rev. A **53(3)** (1996) R 1209–1212
- [29] N. Kiesel, H. Weinfurter, et al., *Linear Optics Cnotrolled-Phase Gate Made Simple*, Phys. Rev. Lett. **95** (2005)
- [30] N. K. Langford, A. G. White, et al., *Demonstration of a simple entangling optical gate and its use in Bell-state analysis*, Phys. Rev. Lett. **95** (2005)
- [31] S. M. Cohen, *Visualizing Teleportation*, eprint arXiv:0704.0051v2 (2008),  
<http://arxiv.org/pdf/0704.0051v2.pdf>
- [32] D. Bruß, *Quanteninformatik*, Fischer-Taschenbücher Fischer, 2003
- [33] C. H. Bennett, G. Brassard, et al., *Purification of Noisy Entanglement and Faithful Teleportation via Noisy Channels*, Phys. Rev. Lett. **76** (1996) 722–725
- [34] D. Deutsch, A. Ekert, et al., *Quantum Privacy Amplification and the Security of Quantum Cryptography over Noisy Channels*, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 2818–2821
- [35] G. Brands, *Einführung in die Quanteninformatik*, Springer, 2011
- [36] J. H. Shapiro, *Architectures for long-distance quantum teleportation*, New Journal of Physics **4** (2002) 47.1–47.18
- [37] S. Arroyo Camejo, *Skurrile Quantenwelt*, Springer, 2006
- [38] M. Barakat and T. Hanke, *Cryptography – Lecture notes*, Vorlesungsskript, Technische Universität Kaiserslautern und RWTH Aachen, 2012.  
[http://www.mathematik.uni-kl.de/~barakat/Lehre/WS10/Cryptography/lecture\\_notes/Cryptography.pdf](http://www.mathematik.uni-kl.de/~barakat/Lehre/WS10/Cryptography/lecture_notes/Cryptography.pdf)
- [39] C. Fruböse, *Der ungeliebte Physikunterricht*, MNU **7** (2010) 388–392

- [40] P. Labudde, *Erlebniswelt Physik*, Dümmler-Verlag, Bonn, 1993
- [41] J. Kuhn, P. Vogt, et al., *Kontextorientierter Unterricht: Konzeption, Theorien und Forschung zu Motivation und Lernen*, PdN-PhiS **5** (2010) 13–25
- [42] *Lehrplan Physik Sekundarstufe I, Rheinland-Pfalz*,  
[http://lehrplaene.bildung-rp.de/lehrplaene-nach-faechern.html?tx\\_abdownloads\\_pi1\[action\]=getviewcatalog&tx\\_abdownloads\\_pi1\[category\\_uid\]=105&tx\\_abdownloads\\_pi1\[cid\]=5786&cHash=ee8ea91787597029336f19799076da00](http://lehrplaene.bildung-rp.de/lehrplaene-nach-faechern.html?tx_abdownloads_pi1[action]=getviewcatalog&tx_abdownloads_pi1[category_uid]=105&tx_abdownloads_pi1[cid]=5786&cHash=ee8ea91787597029336f19799076da00)
- [43] *Lehrplan Physik Oberstufe, Rheinland-Pfalz*,  
[http://lehrplaene.bildung-rp.de/no-cache/schulart.html?tx\\_abdownloads\\_pi1%5Baction%5D=getviewclickeddownload&tx\\_abdownloads\\_pi1%5Buid%5D=227&tx\\_abdownloads\\_pi1%5Bcid%5D=5785](http://lehrplaene.bildung-rp.de/no-cache/schulart.html?tx_abdownloads_pi1%5Baction%5D=getviewclickeddownload&tx_abdownloads_pi1%5Buid%5D=227&tx_abdownloads_pi1%5Bcid%5D=5785)
- [44] *Lehrplan Physik, Gymnasium (G8), Bayern*,  
<http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26382>
- [45] *Einführung in das Konzept der DVD Quantendimensionen*,  
<http://www.sciencemotion.de/files/sciencemotion/Konzept-Quantendimension.pdf>
- [46] *Rahmenlehrplan Mathematik Klassenstufen 5-9/10, Rheinland-Pfalz*,  
[http://lehrplaene.bildung-rp.de/no-cache/lehrplaene-nach-faechern.html?tx\\_abdownloads\\_pi1%5Baction%5D=getviewclickeddownload&tx\\_abdownloads\\_pi1%5Buid%5D=219&tx\\_abdownloads\\_pi1%5Bcid%5D=5786](http://lehrplaene.bildung-rp.de/no-cache/lehrplaene-nach-faechern.html?tx_abdownloads_pi1%5Baction%5D=getviewclickeddownload&tx_abdownloads_pi1%5Buid%5D=219&tx_abdownloads_pi1%5Bcid%5D=5786)
- [47] *Unterrichtskonzept der Universität Erlangen*,  
<http://www.didaktik.physik.uni-erlangen.de/quantumlab/Konzept/index.html>
- [48] B. Diehl et al., *Physik - Oberstufe*, Cornelsen, Berlin, 2008
- [49] Spektrum der Wissenschaft / Dossier, *Quanteninformation*, Spektrum der Wissenschaft Verlag, 2010
- [50] P. Schmäser, *Theoretische Physik für Studierende des Lehramts 1*, Springer, 2012

- [51] S. Heusler, *Quantendimensionen (DVD-ROM)*, Klett, 2010
- [52] *Einheitliche Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Physik*,  
[http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen\\_beschluesse/1989/1989\\_12\\_01-EPA-Physik.pdf](http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/1989/1989_12_01-EPA-Physik.pdf)
- [53] *Internetseite des Schülerlabors der AG Didaktik der Physik an der Universität Erlangen*,  
<http://www.didaktik.physik.uni-erlangen.de/quantumlab/>
- [54] S. Gröber, *Experimentieren aus der Ferne (RCL-Projekt an der Technischen Universität Kaiserslautern)*, Dissertation, TU Kaiserslautern, 2011
- [55] *Informationen zu IBEs*,  
<http://didaktik.physik.fu-berlin.de/projekte/ibe/index.html>
- [56] A. Gathmann, *Einführung in die Algebra*, Vorlesungsskript, Technische Universität Kaiserslautern, 2011.  
<http://www.mathematik.uni-kl.de/~gathmann/class/algebra-2010/main.pdf>



# Danksagung

Mit dieser Masterarbeit bin ich dem Abschluss des Studiums und somit meinem Ziel, Gymnasiallehrer für Mathematik und Physik zu werden, ein großes Stück näher gekommen. Daher möchte ich mich an dieser Stelle bei allen bedanken, die mich während des Studiums unterstützt und zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Besonders danken möchte ich:

- Herrn apl. Prof. Dr. Hans Jürgen Korsch für die Betreuung dieser Masterarbeit, sowie die Unterstützung durch zahlreiche Gespräche und Anregungen während der Entstehungsphase dieser Arbeit.
- Herrn Prof. Dr. Artur Widera für die freundliche Übernahme des Zweitgutachtens und die Betreuung in den letzten Monaten.
- Herrn Benjamin Klein, der im selben Zeitraum eine Masterarbeit mit dem Titel „*Quantenkryptographie – Theoretische Grundlagen und praktische Implikationen für die Schule*“ verfasst hat, für die zahlreichen fachlichen Diskussionen, die nicht physikalischen Gespräche sowie die Unterstützung und Zusammenarbeit während des Studiums.
- Herrn Dr. Kevin Rapedius für die angenehme Arbeitsatmosphäre und die Hilfe bei technischen Fragen in den vergangenen vier Monaten.
- Herrn Prof. Dr. Jan-Peter Meyn, Herrn Gernot Erler und Herrn Andreas Strunz für die Möglichkeit das Schülerlabor des Fachbereichs Physik an der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg zu besichtigen, die freundliche Betreuung vor Ort inklusive der anregenden Gespräche.
- Herrn Prof. Dr. Jochen Kuhn für Anmerkungen zum didaktischen Teil dieser Arbeit.
- Meinen Eltern, meinen Kommilitonen sowie meinen Freunden, welche mich während des Studiums unterstützt und zum Teil diese Arbeit Korrektur gelesen haben.
- Der Bundesrepublik Deutschland und der Human Solutions GmbH für die Unterstützung in Form eines Deutschlandstipendiums.





# Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel und Quellen angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten und nicht veröffentlichten Schriften entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit ist in gleicher oder ähnlicher Form oder auszugsweise im Rahmen einer anderen Prüfung noch nicht vorgelegt worden.

Kaiserslautern, den 05.09.2012

---

Christian Geyer



**Digitale Version dieser Masterarbeit**